

**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ**  
**«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ**  
**імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»**  
**МЕХАНІКО-МАШИНОБУДІВНИЙ ІНСТИТУТ**  
Кафедра технології машинобудування

«На правах рукопису»  
УДК 621.921

**«До захисту допущено»**

Завідувач кафедри  
\_\_\_\_\_ **Юрій ПЕТРАКОВ**  
(підпис) (ініціали, прізвище)

“ \_\_\_\_ ” грудня 2020р.

## **Магістерська дисертація**

зі спеціальності 131 «Прикладна механіка»

на тему: Конструкторсько-технологічна підготовка безсупортного  
адитивного виробництва деталей машин

Виконав: студент 6-о курсу, групи **МТ-з91мп**

\_\_\_\_\_ **Шугай Владислав Русланович**  
(прізвище, ім'я, по батькові)

\_\_\_\_\_ (підпис)

Науковий керівник \_\_\_\_\_ **к.т.н., доцент Фролов В.К.**  
(посада, науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали)

\_\_\_\_\_ (підпис)

Консультант другого розділу **д.ф.-м.н., професор Янчевський І.В**  
(назва розділу) (науковий ступінь, вчене звання, прізвище, ініціали)

\_\_\_\_\_ (підпис)

Рецензент \_\_\_\_\_ **к.т.н., доцент Блощинин М.С.**  
(посада, науковий ступінь, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

\_\_\_\_\_ (підпис)

Засвідчую, що у цій магістерській  
дисертації немає запозичень з праць  
інших авторів без відповідних  
посилань.

Студент \_\_\_\_\_  
(підпис)

Київ – 2020 року

**Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут  
імені Ігоря Сікорського»**

Інститут/факультет \_\_\_\_\_ Механіко-машинобудівний інститут  
(повна назва)

Кафедра \_\_\_\_\_ Технології машинобудування  
(повна назва)

Рівень вищої освіти – другий (магістерський) за освітньо-професійною програмою

Спеціальність (спеціалізація) \_\_\_\_\_ 131 «Прикладна механіка»  
(код і назва)

**ЗАТВЕРДЖУЮ**  
**Завідувач кафедри**

\_\_\_\_\_  
(підпис) (ініціали, прізвище)

«08» вересня 2019 р.

**ЗАВДАННЯ**  
**на магістерську дисертацію студенту**  
Шугаю Владиславу Руслановичу  
(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема дисертації \_\_\_\_\_ Конструкторсько-технологічна підготовка  
безсупортного адитивного виробництва деталей машин  
науковий керівник дисертації \_\_\_\_\_ Фролов В.К., к.т.н., доцент,  
(прізвище, ім'я, по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом по університету від «03» листопада 2020 р. № 3205-с

2. Строк подання студентом дисертації «16» грудня 2020 р.

3. Об'єкт дослідження: \_\_\_\_\_ безсупортне адитивне виробництво

4. Предмет дослідження (Вихідні дані – для магістерської дисертації за освітньо-професійною програмою) \_\_\_\_\_ обмеження та \_\_\_\_\_ параметри  
підготовки деталей машин для безсупортного адитивного виробництва

5. Перелік завдань, які потрібно розробити \_\_\_\_\_ Визначити основні підходи  
до підготовки деталей до безсупортного адитивного виробництва.

Розробити алгоритм, що дозволить оптимізувати виріб для безсупортного адитивного виробництва. Практичне підтвердження ефективності запропонованого рішення.

6. Перелік графічного (ілюстративного) матеріалу слайди Microsoft PowerPoint, додаткові мультимедійні матеріали

7. Орієнтовний перелік публікацій одна публікація

8. Консультанти розділів дисертації

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв
Розробка алгоритму оптимізації виробу для «безсупортного» адитивного виробництва	Янчевський І.В., д.ф.-м.н., професор		

9. Дата видачі завдання 08.09.2019

#### Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Строк виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1	Формування теми дисертації	09.09.2019 – 27.09.2019	Виконано
2	Аналіз наявних досліджень	27.09.2019 – 06.03.2020	Виконано
3	Розроблення алгоритму оптимізації виробу	06.03.2020 – 08.06.2020	Виконано
4	Проведення практичного дослідження	08.06.2020 – 31.07.2020	Виконано
5	Аналіз даних	31.07.2020 – 02.10.2020	Виконано
6	Розроблення стартап-проекту впровадження розробленої технології	02.10.2020 – 06.11.2020	Виконано
7	Оформлення дисертації	06.11.2020-14.12.2020	Виконано

Студент

\_\_\_\_\_  
(підпис)

Владислав Шугай  
(ініціали, прізвище)

Науковий керівник дисертації

\_\_\_\_\_  
(підпис)

Володимир Фролов  
(ініціали, прізвище)

## РЕФЕРАТ

Робота містить: 79 аркушів, 19 ілюстрацій, 1 таблицю. При написанні роботи використано 22 літературних джерела.

*Актуальність теми* - адитивне виробництво є перспективною технологією в наш час. В зв'язку з його швидким розповсюдженням і використанням в великій кількості сфер виробництва. Тож актуальним є підвищення ефективності використання матеріалу в процесі 3D друку виробу, оскільки це дозволяє зробити процес дешевшим та швидшим.

*Об'єкт дослідження* – «безсупортне» адитивне виробництво.

*Предмет дослідження* – обмеження та параметри підготовки деталей машин для «безсупортного» адитивного виробництва.

*Мета роботи* – підвищення ефективності підготовки моделей до «безсупортного» адитивного виробництва.

*Завдання* – розробити алгоритм, що дозволить ефективніше оптимізувати вироби для «безсупортного» адитивного виробництва. Тобто зменшити масу отримуваних деталей, зменшити кількість додаткових «підтримуючих» структур під час виробництва, що дозволить зменшити витрати на додаткові матеріали, скоротити кількість операцій та зменшити собівартість виробництва.

### ***Наукова новизна одержаних результатів***

1. Запропоновано новий спосіб вирішення задачі упакування еліпсів в замкнену багатокутну область;
2. Введено нові обмеження обумовлені можливостями обладнання для адитивного виробництва (3D принтерів);
3. Розроблений алгоритм для вирішення задачі оптимізації деталей для «безсупортного» адитивного виробництва.

### ***Практичне значення одержаних результатів***

Розроблений алгоритм надає можливість зменшити масу отримуваних виробів, підвищити їх міцність та довговічність, а також зменшити

собівартість виробів, оскільки витрачається значно менше матеріалу (особливо для «підтримок») та виріб потребує лише мінімальної додаткової обробки. Також алгоритм включає в себе параметри, які необхідні для якісного виготовлення деталей за допомогою 3D принтерів, що виключає утворення дефектів на виробах.

***Пропозиції щодо можливих напрямків продовження дослідження***

Подальші дослідження доцільно проводити в напрямку доповнення використовуваних в алгоритмі, а також зміні основних цілей алгоритму, наприклад на підвищення механічних властивостей отримуваних виробів.

Під час навчання опубліковано 1 матеріали всеукраїнської конференції.

**Ключові слова:** ОПТИМІЗАЦІЯ, ЕЛПСИ, МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ, «БЕЗСУПОРТНЕ»АДИТИВНЕ ВИРОБНИЦТВО.

## ABSTRACT

The work contains: 79 sheets, 19 illustrations and 1 table. 22 literary sources were used in writing the work.

*Relevance of the topic* – additive manufacturing is a promising technology in our time. Due to its rapid spread and use in many areas of manufacturing. Therefore, it is important to increase the efficiency of the material in the process of 3D printing the product, as it allows you to make the process cheaper and faster.

*The object of research* is "support-free" additive manufacturing.

*The subject of research* is the limitations and parameters of preparation of machine parts for "support-free" additive manufacturing.

*The purpose of the work* is to increase the efficiency of model preparation for "support-free" additive manufacturing.

*The task* is to develop an algorithm that will allow more efficient optimization of products for "support-free" additive manufacturing. That algorithm allow to reduce the mass of parts obtained, to reduce the number of additional "supporting" structures during production, which will reduce the cost of additional materials, reduce the number of operations and reduce production costs.

### ***Scientific novelty of the obtained results***

1. A new method for solving the problem of packing ellipses in a closed polygonal area is proposed;
2. Introduced new restrictions due to the capabilities of equipment for additive manufacturing (3D printers);
3. Developed an algorithm to solve the problem of optimization of parts for "support-free" additive manufacturing.

### ***The practical significance of the obtained results***

The developed algorithm makes it possible to reduce the weight of the products, increase their strength and durability, as well as reduce the cost of products, as much less material is used (especially for "supports") and the product requires only minimal additional processing. The algorithm also includes the

parameters that are necessary for high-quality manufacturing of parts using 3D printers, which eliminates the formation of defects on products.

***Suggestions for possible areas of further research***

Further research should be conducted in the direction of supplementing the algorithms used in the algorithm, as well as changing the main objectives of the algorithm, such as improving the mechanical properties of the products.

During the learning 1 materials of the all-Ukrainian conference were published.

**Keywords:** OPTIMIZATION, ELLIPSES, MATHEMATICAL MODEL, "SUPPORT-FREE" ADDITIVE PRODUCTION.

## *Зміст*

ВСТУП .....	12
1 АНАЛІЗ НАЯВНИХ ПРИКЛАДІВ ТА МЕТОДІВ ПІДГОТОВКИ ДЕТАЛЕЙ ДО «БЕЗСУПОРТНОГО» АДИТИВНОГО ВИРОБНИЦТВА .....	16
1.1 Що таке адитивні технології.....	16
1.2 Технології адитивного виробництва	17
1.2.1 Моделювання методом наплавлення (Fused Deposition Modeling (FDM))	18
1.2.2 Стереолітографія (Stereolithography Apparatus(SLA))	20
1.2.3 Цифрова обробка світлом (Digital Light Processing (DLP))	22
1.2.4 Liquid-crystal polymers (LCD)	24
1.2.5 Селективне(вибіркове) лазерне спікання (Selective Laser Sintering (SLS)) та пряме лазерне спікання металу (Direct Metal Laser Sintering (DMLS))	26
1.2.6 Селективне(вибіркове) лазерне плавлення (Selective Laser Melting (SLM)) та пряме лазерне плавлення металу (Direct Metal Laser Melting (DMLM))	28
1.2.7 PolyJet	30
1.2.8 Multi Jet Fusion (MJF)	31
1.2.9 Багатоструменеве моделювання (Multi Jet Modelling (MJM))	32
1.3 Методи підготовки виробів до «безсупортного» адитивного виробництва	34
1.4 Висновки	36



2	РОЗРОБКА АЛГОРИТМУ ОПТИМІЗАЦІЇ ВИРОБУ ДЛЯ «БЕЗСУПОРТНОГО» АДИТИВНОГО ВИРОБНИЦТВА.....	38
2.1	Постановка задачі для розроблення алгоритму	38
2.2	Phi-функція для обмежувальних обмежень	39
2.1.1	Обмеження еліпса $E_i(u_i)$ для РЕВПО	39
2.1.2	Обмеження еліпса $E_i(u_i)$ для РЕОБ	40
2.3	Нормалізована квазі-phi-функція для неперекриваючих обмежень	41
2.4	Математична модель РЕВПО	43
2.5	Змішана цілочисельна модель РЕОБ	44
2.6	Нелінійна безперервна модель ЗРЕ	45
2.7	Алгоритм для задачі РЕВПО	45
2.8	Стратегія рішення ЗРЕ	46
2.9	Запуск алгоритму можливих параметрів	46
2.10	Локальний алгоритм оптимізації	48
2.11	Висновки	51
3	ПРАКТИЧНЕ ЗАСТОСУВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ .....	53
3.1	Застосування алгоритму для підготовки виробу до адитивного виробництва	53
3.2	Алгоритм оптимальної упаковки в полігональну область	60
3.3	Висновки	62
4	СТАРТАП-ПРОЄКТ .....	64
4.1	Опис ідеї проекту	65
4.2	Аналіз актуальності запровадження ПЗ	66
4.3	Аналіз сфер застосування стартап-проекту	67
4.4	Аудит проекту	70

4.5	Маркетингове дослідження	70
4.6	Створення адитивного виробництва з використанням нашого стартап-проекту	72
4.7	Висновки	73
5	ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ .....	75
	Список літератури .....	77

### **Список умовних позначень**

РЕВПО – розміщення еліпса у відокремленій полігональній області;

РЕОБ – розміщення еліпса в опуклому багатокутнику;

ЗЦЗ – змішана цілочисельна задача;

НЛП – нелінійне програмування;

ЗРЕ – задача розміщення еліпсів;

АМП – алгоритм можливих параметрів;

ПБМП – полегшений та «безсупортний» метод проектування;

ПЗ – програмне забезпечення.

## ВСТУП

Адитивне виробництво деталей, реалізоване за допомогою 3D-принтерів, можна назвати однією з сфер сучасного виробництва, що швидко розвиваються. У наш час 3D-друк досить широко використовується, як для прототипування, так і для виготовлення готових виробів. 3D-друк популярний в таких галузях: машинобудування, біоінженерія, архітектура, промисловий дизайн, аерокосмічна промисловість, медицина, виробництво меблів, взуття, одягу, ювелірних виробів та навіть муз. Сфери застосування цієї технології постійно розширюються. Наприклад, нещодавно компанія Porsche за допомогою 3D-друку з технологією селективного лазерного спікання(SLS) виготовила поршні, які на 10% легші за аналоги, також в них вдалося створити внутрішній канал, який неможливо було б отримати будь-яким іншим способом виробництва. Все це дозволило підняти швидкість обертання колінчастого валу та знизити температурне навантаження на поршні, оптимізувати процес згоряння і отримати більшу потужність при кращій економічності [1].

Вважається, що за наявності 3D моделі деталі процес її 3D-друку повністю автоматизований. Але в процесі побудови фрагментів моделі, які не контактують з шарами, що знаходяться нижче, або з робочою платформою, виникають певні труднощі, адже такі фрагменти не мають опорних точок і висять просто в повітрі. Відповідно і результат друку таких моделей може бути досить неочікуваним. Щоб запобігти цьому, спеціалізовані програмні засоби для підготовки 3D моделі до 3D-друку доповнюють оригінальну модель деталі так званими «підтримками», які слід видалити після завершення процесу 3D-друку. Така технологічна операція іноді значно збільшує час, що впливає на витрати на виготовлення деталі, а ще «підтримки» можуть утворюватися в складно доступних місцях, звідки їх неможливо буде дістати. Цей недолік особливо помітний у випадку масового

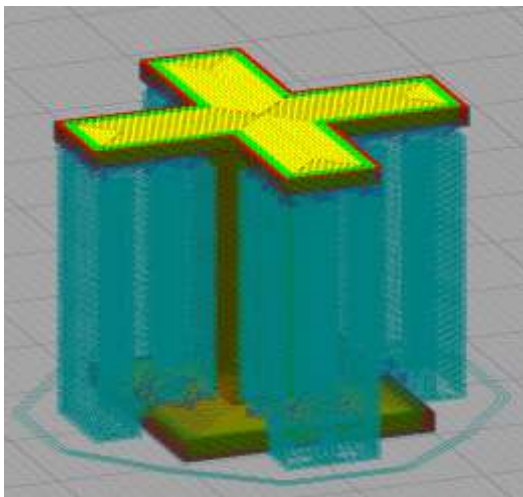
виробництва. Також використання підтримок часто погіршує якість дотичної поверхні [2]. Існує декілька варіантів вирішення цієї проблеми:

- Оптимізація розміщення підтримок;
- Оптимізація деталі для «безсупортного» виробництва.

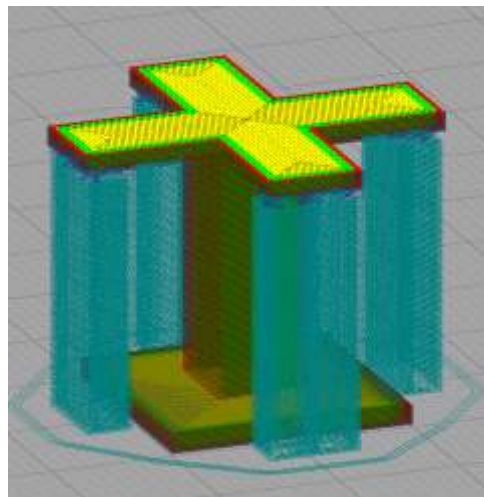
Основним інструментом для оптимізації розміщення підтримок є спосіб їх утворення. Деякі програмні засоби (ПЗ) для підготовки моделей до 3D-друку дозволяють обрати декілька різних типів підтримок. Наприклад, ПЗ Cura дозволяє обрати декілька варіантів утворення «підтримок» [3]:

- Системою плоских прямих «підтримок» від робочої платформи до «нависаючого» елементу;
- Системою плоских прямих «підтримок» від робочої платформи і від нижніх шарів виробу;
- Системою циліндричних пустотілих «підтримок» зі змінним діаметром від робочої платформи.

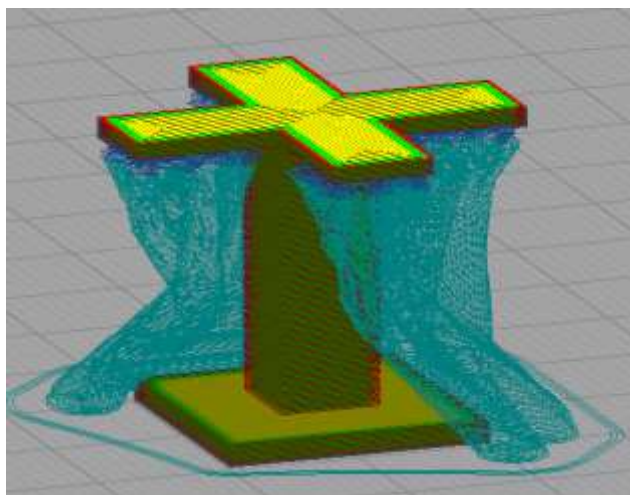
Розглянемо спосіб побудови «підтримок» на прикладі простої моделі з нависаючими елементами.



а)



б)



в)

Рис.1 – «Підтримки» в ПЗ Cura:

- а) плоскі прямі від робочої платформи і від нижніх поверхонь деталі;
- б) плоскі прямі від робочої платформи; в) циліндричні від робочої платформи.

В даному випадку циліндричні «підтримки» зберігають якість нижньої поверхні деталі і утворюють «підтримки» для «нависаючих» елементів, а також завдяки використанню меншої кількості матеріалу для підтримок, відповідно зменшується час на отримання готового виробу і деталь потребує менше часу для подальшої обробки.

Оптимізація моделі для «безсупортного» виробництва дозволяє максимально зменшити кількість відходів, зберегти і навіть покращити механічні властивості виробу, підвищити швидкість виробництва, зменшити час на подальшу обробку виробів. Такий підхід найбільш актуальний для масового виробництва, оскільки мінімізується кількість операцій обробки, що впливає на вартість виробництва. Також згладження гострих кутів виробу, які є концентраторами напружень, позитивно впливає на його довговічність та міцність, особливо при знакозмінних навантаженнях. Оптимізація для «безсупортного» виробництва дозволяє не зважати на орієнтацію встановлення деталі на робочу платформу, на відміну від методу оптимізації розміщення «підтримок», який потребує правильної орієнтації

при виробництві, для мінімізації використання додаткового матеріалу для створення «підтримок».

Отже, спираючись на вище перелічені фактори, впровадження методу «безсупортного» адитивного виробництва є актуальним для сучасного виробництва, оскільки дозволяє швидше отримувати якісні вироби за меншої їх вартості.

# **1 АНАЛІЗ НАЯВНИХ ПРИКЛАДІВ ТА МЕТОДІВ ПІДГОТОВКИ ДЕТАЛЕЙ ДО «БЕЗСУПОРТНОГО» АДИТИВНОГО ВИРОБНИЦТВА**

## ***1.1 Що таке адитивні технології***

Більш поширеною назвою адитивних технологій є 3D друк. Отже розберемо поняття 3D друк.

Перша технологія 3D друку була запатентована ще в 80-х роках минулого сторіччя, але значну популярність адитивні технології отримали відносно нещодавно. Були розроблені нові методи 3D друку, що дало технології більше можливостей і підняло її на абсолютно новий рівень. Хоча 3D друк вже є досить поширеною технологією, але все одно не кожен розуміє і може доступно пояснити поняття 3D друк.

3D друк – це метод виготовлення об'ємних виробів на основі їх цифрових 3D моделей. Незалежно від конкретної технології, сенс процесу залишається в поступовому пошаровому відтворенні об'єктів з спеціального матеріалу. Для цього процесу використовується спеціальне обладнання – 3D принтер.

Розглянемо процес отримання виробу за допомогою 3D друку. Розділимо процес на етапи.

*Етап 1.* Створення цифрової моделі виробу в спеціальному програмному забезпеченні, CAD системі.

*Етап 2.* Конвертація 3D моделі в формат STL, який зрозумілий для програмного забезпечення, яке готує файл для передачі 3D принтеру, і для деяких 3D принтерів. Існують 3D принтери, які можуть створювати виріб використовуючи лише його цифрову модель, тобто етап 3 виконується принтером в автоматичному режимі. Отже в такому випадку, етапи 3 і 4 пропускаються. Але такий метод застосовний лише для простих моделей, адже його результат не можливо проконтролювати.



*Етап 3.* STL файл завантажується в спеціальне програмне забезпечення «слайсер», в якій обираються необхідні параметри для 3D друку (висота шару, заповнення моделі, необхідність «підтримок» і їх розташування і т.д.). Після застосування параметрів «слайсер» нарізає модель на шари, які будуть по чергово відтворюватися 3D принтером. Вихідним файлом після «слайсера» є управляючий код (G-code).

*Етап 4.* Далі G-code передається до 3D принера.

*Етап 5.* 3D друк виробу.

*Етап 6.* За необхідності проводиться постобробка виробу. В залежності від технології 3D друку це може бути як просте видалення «підтримок» чи видалення залишків матеріал, так і термообробка для кращого спікання шарів виробу між собою.

3D друк дозволяє отримати практично будь-який виріб. Відповідно, вирішує питання виготовлення деталей з складно профільними поверхнями (наприклад, внутрішні криволінійні отвори), які неможливо отримати жодним з класичних способів оброблення.

## ***1.2 Технології адитивного виробництва***

Різноманітність технологій 3D друку дозволяє йому підкорювати різні галузі. Адитивні технології знайшли застосування в таких галузях: біоінженерія, медицина, архітектура, машинобудування, ювелірна промисловість, одяг та взуття, меблі та декор, освіта та навіть харчова промисловість. І список галузей в яких застосовується 3D друк постійно розширюється. Отже, слід розглянути відмінності між технологіями. Основна відмінність криється лише в процесі отримання готових виробів.

Розглянемо найбільш поширені технології 3D друку на даний момент.

### **1.2.1 Моделювання методом наплавлення (Fused Deposition Modeling (FDM))**

Одна з найбільш поширених технологій. Популярна за рахунок співвідношення ціни до якості отримуваних моделей. Також дозволяє отримувати абсолютно будь-які вироби від іграшок для дітей до функціональних виробів.

Оскільки технологія такою поширеною, відповідно, різноманіття матеріалів вражає. В якості матеріалу використовуються спеціальні нитки пластику діаметром 1,75 мм або 2,9 мм (в залежності від моделі 3D принтера) змотані в котушки. На ринку представлений широкий вибір матеріалів для різних задач: звичайні полімерні, підвищеної міцності та жорсткості, гнучкі, з металічними включеннями, підвищеної стійкості до широкого спектру температур, хімічно стійкі і т.і. Також представлені спеціальні матеріали для «підтримок», які можуть розкладатися у воді або спеціальних хімічних розчинах.

Розглянемо процес роботи технології: матеріал (Рис. 1.1, поз. 6) за допомогою механізму подачі (Рис. 1.1, поз. 5) направляється до нагрівального блоку (Рис. 1.1, поз. 3), де розігрівається до напіврідкого стану і пропускається через сопло (Рис. 1.1, поз. 4) друкуючої головки, діаметр якого зазвичай 0,4 мм (але можна його змінити і використовувати 0,1-0,2 мм для більш деталізованого друку або ж навпаки 0,8-1 мм для більш жорстких виробів) викладаючи його на робочу платформу (Рис. 1.1, поз. 1), або попередній шар, в відведених місцях. Після утворення одного шару, платформа опускається на заданий крок і так доки виріб (Рис. 1.1, поз. 2) повністю не відтвориться. Зазвичай друкуюча головка переміщується по  $O_x$  та  $O_y$ , а робоча платформа (стіл) по  $O_z$ . Таким чином відбувається друк за допомогою цієї технології. Деякі принтери можуть мати одночасно декілька друкуючих головок, наприклад, для друку виробу і підтримок різними матеріалами, або створення включень з іншими фізико-механічними характеристиками.

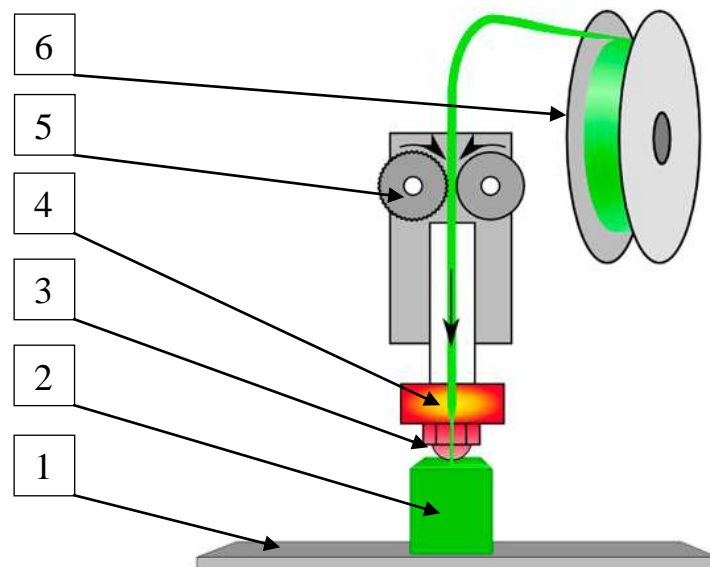


Рис. 1.1 – Основні елементи FDM 3D принтера

Також змінивши друкуючу головку на іншу, наприклад, для друку харчовими продуктами (тістом, шоколадом і т.п.), то можна отримувати вироби не лише з пластику [4].

Переваги технології:

- Простота в експлуатації;
- Економічна ефективність (виробництво за цією технологією дешевше, ніж в інших методах 3D-друку, і матеріали для неї теж мають більш низьку вартість);
- Гнучкість у виборі матеріалу (існує широкий спектр матеріалів, і всі вони доступні і економічні);
- Швидкість виробництва (найшвидша технологія виробництва деталей, якщо мова йде про дрібно - і середньосерійному виробництві. У випадку ж з прототипами час виробництва порівняно з традиційними технологіями менше в десятки разів);
- Доступність старту (ціни на принтери починаються від 200\$ для особистого та від 2000\$ для промислового використання).

Недоліки:

- Технологія має найнижчі розмірні допуски в порівнянні з іншими технологіями 3D друку;

- Не гладка зовнішня поверхня, оскільки видно місця укладання шарів, потребує постобробки для вирівнювання поверхонь.

### **1.2.2 Стереолітографія (StereoLithography Apparatus(SLA))**

SLA вважається найпершою адитивною технологією. І з моменту її створення технологія тільки покращила свої властивості, і вважається однією з найточніших технологій. Оскільки процес за якого відбувається 3D друк не відбувається при високих температурах і матеріал немає усадки.

В якості матеріалу для цього методу використовуються різноманітні полімерні смоли. Вибір матеріалів набагато менший, ніж для FDM. Та і в такому різноманітті немає необхідності, оскільки SLA технологія зайняла ніші в яких необхідна висока точність виробів і немає потреби в широкому спектрі матеріалів.

Отже, розглянемо технологію отримання виробів. Сітчаста робоча платформа (Рис. 1.2, поз 1) занурюється в резервуар з рідким фотополімером (Рис. 1.2, поз 2) на 0,05-0,15 мм (залежить від параметрів виставлених в «слайсері»). Потім спеціальний змішувач (Рис. 1.2, поз 3) заповнює поверхню робочої платформи фотополімером. Після цього вмикається лазер (Рис. 1.2, поз 4), промінь якого проходить через фокусуючу лінзу (Рис. 1.2, поз 5) і за допомогою рухомого дзеркала (Рис. 1.2, поз 6) направляється на відповідні зони, де необхідно утворити шар моделі. В процесі засвітлення лазером відповідні зони затвердіють, таким чином утворюючи перший шар виробу. Далі робоча платформа за допомогою спеціального підйомника (Рис. 1.2, поз 7) знову занурюється на висоту шару і процес повторюється до моменту повного відтворення виробу.

Після того як процес 3D друку виробу завершено його промивають в спеціальних розчинах для видалення залишків фотополімеру. Далі виріб опромінюють ультрафіолетовим світлом для повного затвердіння матеріалу.

Такий процес використовується в промислових SLA 3D принтерах. Це дозволяє отримувати габаритні вироби (приблизно 1500x750x500 мм) в той час настільний принтер – набагато менші (приблизно 150x150x180 мм). Відповідно в настільних моделях використовується більш компактний процес, так званий «SLA 3D друк зверху вниз». В такому випадку лазер з системою лінз та дзеркал знаходиться внизу, а робоча платформа поступово підіймається з фотополімеру.

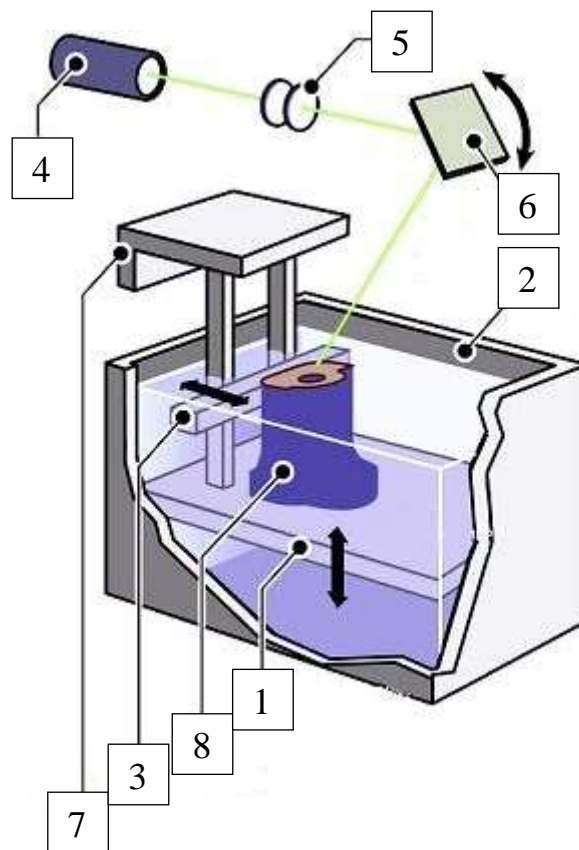


Рис. 1.2 – Будова SLA 3D принтера

Як і в FDM технології SLA технологія також потребує наявності «підтримок» для утворення «нависаючих» поверхонь виробів. Але в залежності від типу 3D принтера (промисловий чи настільний) їх кількість сильно варіюється. Звичайна технологія SLA 3D друку дозволяє розташовувати виріб як завгодно на платформі, що дозволяє знайти положення з найменшою кількістю «підтримок». А от при «SLA 3D друк зверху вниз» більш критичним є мінімізація площі поперечного перерізу,

оскільки сили, що прикладаються до виробу, в процесі його спікання можуть відірвати його від робочої платформи.

SLA 3D принтери (від 1000\$ для особистого користування та від 4000\$ для професійного) та витратні матеріали (від 1500 грн за 0,5 л) для них коштують значно дорожче, ніж для FDM.

Переваги технології:

- Можна виробляти деталі з високою точністю розмірів;
- Деталі мають гладку поверхню і не потребують постоброби, що робить їх ідеальними для використання в якості візуальних прототипів;
- Доступні спеціальні матеріали, наприклад прозорі чи еластичні.

Недоліки:

- Вироби досить крихкі і не підходять для функціональних прототипів;
- Механічні властивості, як і зовнішній вигляд, з часом погіршуються, оскільки матеріал деградує під дією сонячного світла;
- Неможливо відмовитись від «підтримок» і постоброби виробів після SLA 3D друку.

### **1.2.3 Цифрова обробка світлом (Digital Light Processing (DLP))**

Дана технологія є похідною від SLA. Основна відмінність між технологіями полягає в приладі, що використовується для засвітлення шару матеріалу. При DLP 3D друці замість лазера для засвітлення використовується спеціальний проектор. Ця технологія є швидшою в порівнянні з SLA, оскільки одразу засвітлює весь шар виробу, що друкується.

В якості матеріалу для технології також використовуються фотополімерні смоли, але вони взаємозамінні для цих двох технологій, оскільки DLP-проектори та лазери для SLA мають різну довжину хвилі.

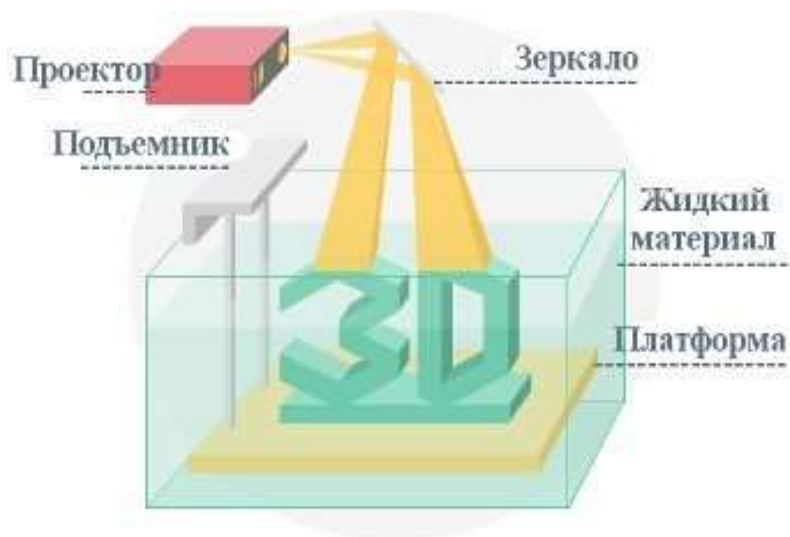


Рис. 1.3 – Будова DLP 3D принтера з прямим друком

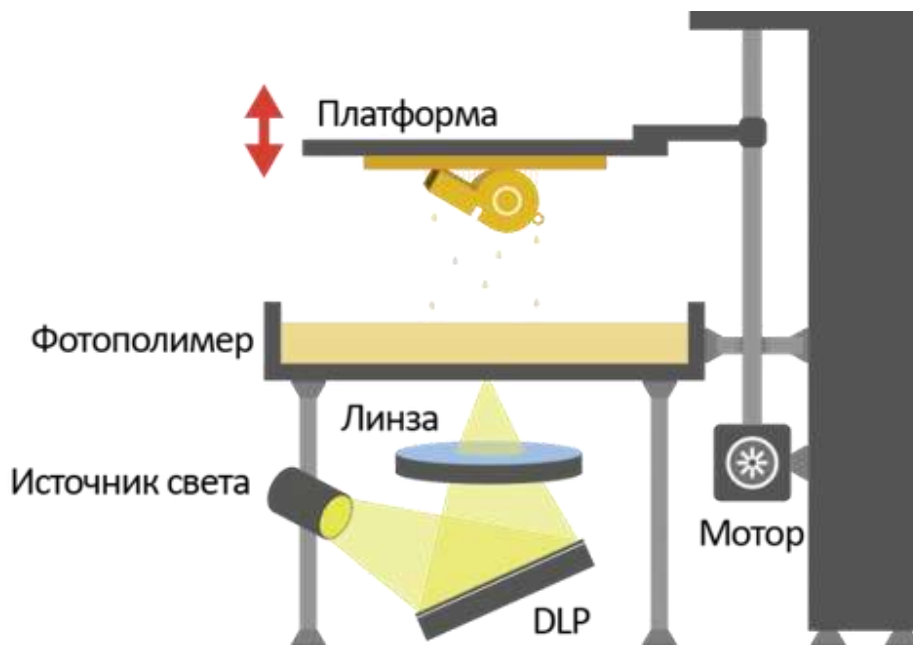


Рис. 1.4 – Будова DLP 3D принтера зі зворотнім друком

Розглянемо технологію отримання виробів. Сітчаста робоча платформа занурюється в резервуар з рідким фотополімером на 0,05-0,15 мм (залежить від параметрів виставлених в «слайсері»). Потім спеціальний вирівнювач заповнює поверхню робочої платформи фотополімером. Після цього вмикається проектор, зображення з якого відбивається від дзеркала і засвічує шар моделі. В процесі засвітлення відповідні зони затвердіють, таким чином утворюючи перший шар виробу. Далі робоча платформа за допомогою спеціального підйомника знову занурюється на висоту шару і процес повторюється до моменту повного відтворення виробу.

Після того як процес 3D друку виробу завершено його промивають в спеціальних розчинах для видалення залишків фотополімеру. Далі виріб опромінюють ультрафіолетовим світлом для повного затвердіння матеріалу.

В процесі зворотного DLP 3D друку, як і при «SLA 3D друк зверху вниз», проектор знаходиться під резервуаром з фотополімером. Такий метод має такі ж недоліки, як і «SLA 3D друк зверху вниз».

Ціна на DLP 3D принтери менша в порівнянні з SLA 3D принтерами, оскільки DLP-проектори коштують дешевше, ніж лазерна система для SLA. Ціни на принтери менші, але не суттєво (від 800\$ для особистого користування та від 3500\$ для професійного), а от ціна на витратні матеріали приблизно однакова (від 1500 грн за 0,5 л).

Переваги технології:

- Вища швидкість 3D друку;
- Нижча вартість обладнання;
- Процес 3D друку простіший, завдяки засвітленню всього шару.

Недоліки:

- Зі збільшенням області друку зменшується точність;
- Наявність паразитного засвічення, що викликає появу викривлень на краях утворюваних моделей.

#### **1.2.4 Liquid-crystal polymers (LCD)**

Ще один різновид SLA технології, більш схожий до DLP. Для засвічення в цьому методі використовується УФ-матриця, яка випромінює ультрафіолетове світло, що потім формується відкриттям пікселів LCD матриці.

В якості матеріалів для друку використовуються аналогічні матеріали, як і для DLP 3D друку.



Процес друку виглядає аналогічно до зворотного DLP 3D друку. Робоча платформа занурюється в резервуар з рідким фотополімером на 0,05-0,15 мм (залежить від параметрів виставлених в «слайсері»). Після цього вмикається УФ лампа та відриваються відповідні пікселі на LCD матриці і засвічує шар моделі. В процесі засвітлення відповідні зони затвердіють, таким чином утворюючи перший шар виробу. Далі робоча платформа за допомогою спеціального підйомника підіймається, спеціальний змішувач рівномірно перемішує фотополімер в резервуарі і процес повторюється до моменту повного відтворення виробу.

Після того як процес 3D друку виробу завершено його промивають в спеціальних розчинах для видалення залишків фотополімеру. Далі виріб опромінюють ультрафіолетовим світлом для повного затвердіння матеріалу.



Рис. 1.5 – Будова LCD 3D принтера

LCD 3D принтери (від 400\$ для особистого користування та від 1500\$ для професійного) та витратні матеріали (від 1500 грн за 0,5 л) для них коштують стільки ж як і для DLP.

Переваги технології:

- Найдешевша серед представлених технологій (SLA і DLP);
- Область друку жорстко зв'язана з розмірами LCD монітора.

Недоліки:

- Відносно невеликий ресурс роботи LCD монітора (близько 1000 годин);
- Наявність паразитного засвічення, що викликає появу викривлень на краях утворюваних моделей (менше, ніж в DLP).

### **1.2.5 Селективне(вибіркове) лазерне спікання (Selective Laser Sintering (SLS)) та пряме лазерне спікання металу (Direct Metal Laser Sintering (DMLS))**

В якості матеріалу використовується порошкові полімери, скло, композити, кераміка, метали та їх сплави [4]. Основним недоліком даної технології є те, що модель отримана спіканням частинок матеріалу між собою, тобто виріб немає однорідної «ливої» структури, відповідно механічні властивості такого виробу значно менші, ніж при використанні попередніх технологій. В той же час в технології має перевагу над більшістю існуючих технологій, оскільки відсутня необхідність в використанні «підтримок», порошок який використовується для друку слугує підтримкою для «нависаючих» елементів, але такий принцип працює не для всіх витратних матеріалів (не підходить для металів та їх сплавів).

Розглянемо принцип роботи технології (Рис. 1.6). Розрівнювач наносить перший рівномірний шар порошку на робочу платформу. Після чого вмикається лазер і за допомогою дзеркал спікає в потрібних місцях порошок. Платформа з порошком підіймається, а робоча платформа опускається на один шар виробу. Далі процес повторюється до отримання готового виробу.

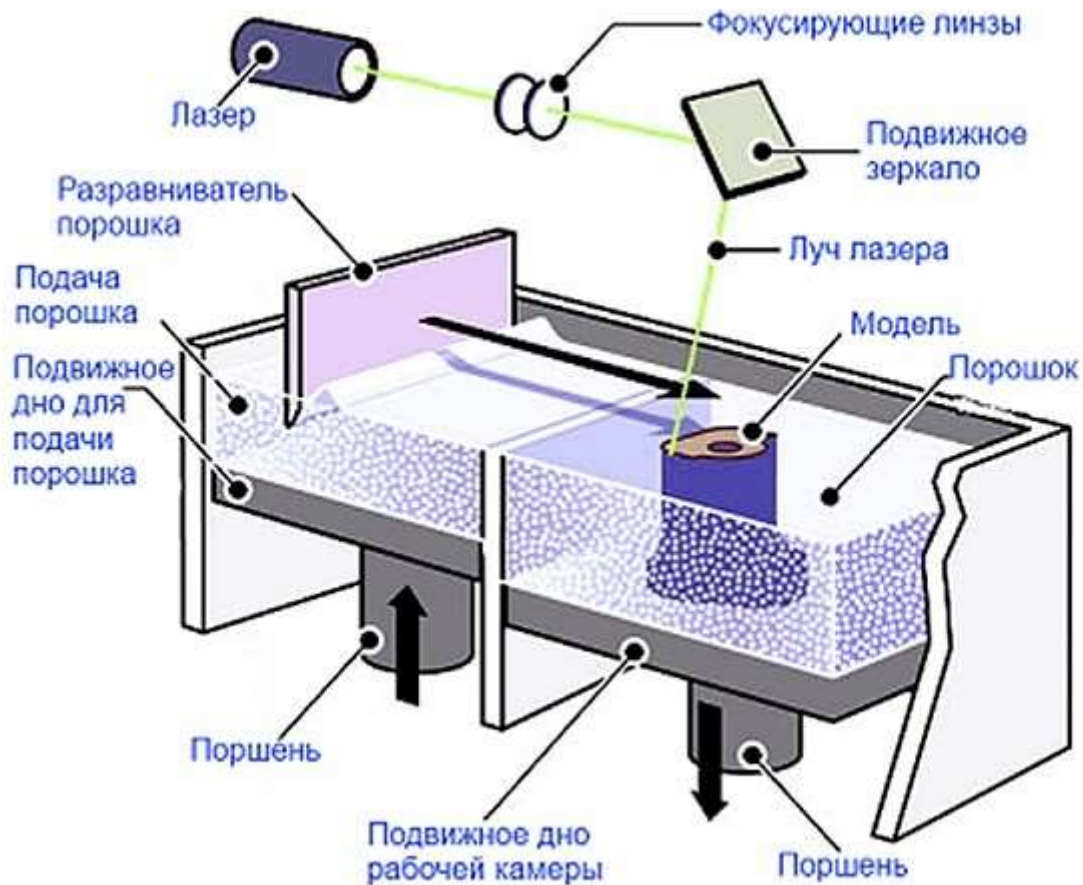


Рис. 1.6 – Будова SLS 3D принтера

Відповідно до використовуваних технологій в обладнанні ціна 3D принтерів даної технології значно вища за попередні (від 15000\$).

Переваги технології:

- Матеріал, який не використовується для друку виробу виступає в якості «підтримки» для нависаючих елементів;
- Порошкові матеріали досить легко знайти в продажу.

Недоліки:

- Отримувана поверхня є пористою;
- Спінання відбувається при високих температурах, тому після закінчення процесу друку, необхідно багато часу для повного остигання;

- Деякі порошки вибухонебезпечні при контакті з киснем, тому їх доводиться зберігати в камерах, що заповнені інертним газом, зокрема азотом.

### **1.2.6 Селективне(вибіркове) лазерне плавлення (Selective Laser Melting (SLM)) та пряме лазерне плавлення металу (Direct Metal Laser Melting (DMLM))**

В якості матеріалу використовується порошкові метали та їх сплави. Різниця між технологіях полягає в тому, що SLM використовується для виробництва деталей з одного металу, в той час, як DMLS – дозволяє створювати вироби з металевих сплавів.

Розглянемо принцип роботи технології (Рис. 1.7). Камера 3D принтера заповнюється інертним газом, зазвичай аргоном. Розрівнювач наносить перший рівномірний шар порошку на робочу платформу. Після чого вмикається лазер і за допомогою дзеркал розплавляє в потрібних місцях порошок. Платформа з порошком підіймається, а робоча платформа опускається на один шар виробу. Далі процес повторюється до отримання готового виробу.

Оскільки процес друку виробу відбувається за високих температур, то для зменшення деформацій та тепловідводу виріб з'єднується з робочою платформою за допомогою «підтримок».

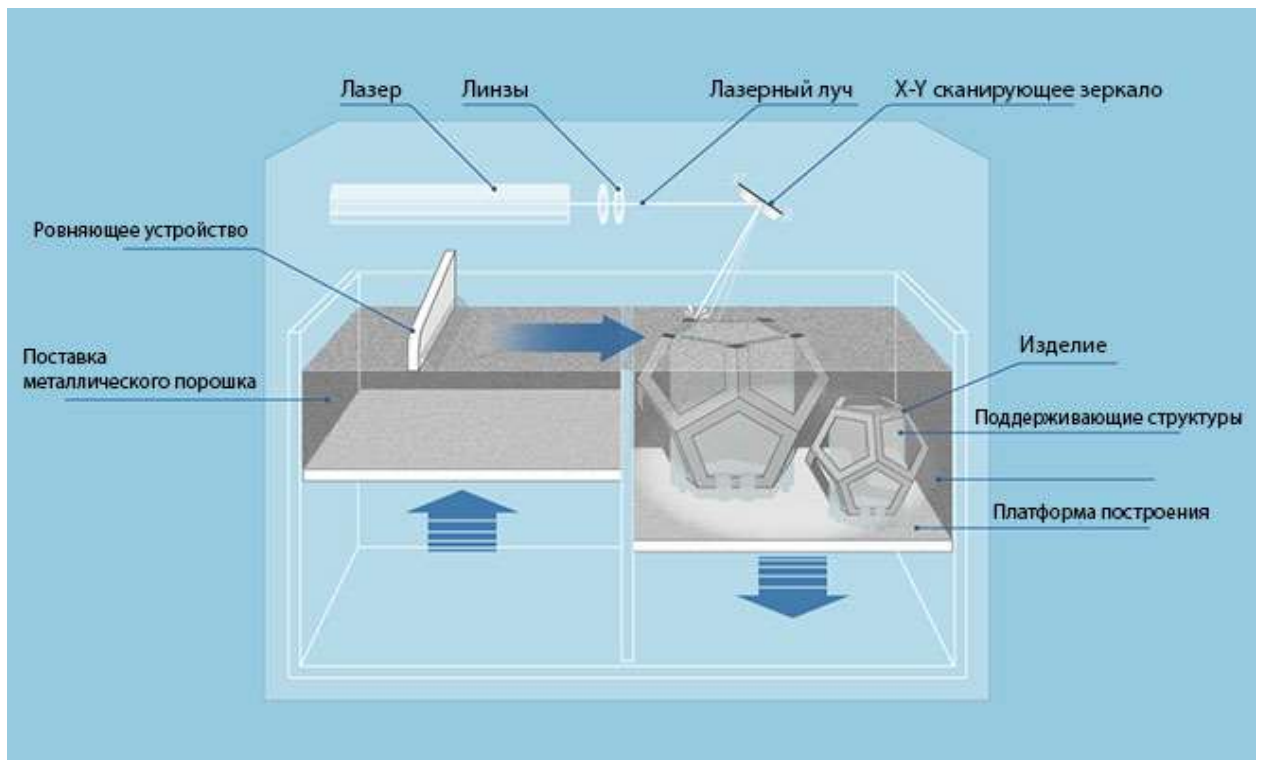


Рис. 1.7 – Будова SLS 3D принтера

Технологія найбільш популярна в медицині та аерокосмічній галузях, оскільки 3D друк на багато вигідніший за фрезерування, габаритних чи індивідуальних деталей. В медицині індивідуальне виготовлення протезів для кожного пацієнта підвищує шанси на одужання.

Ціна на обладнання починається від 150000\$ [5];

Переваги технології:

- Виробництво складно-профільних виробів, які неможливо отримати ні-яким іншим способом;
- Зменшення маси виробів, за рахунок видалення внутрішніх областей з зайвим матеріалом;
- Економія матеріалу, невикористаний матеріал можна повторно використовувати.

Недоліки:

- Використання «підтримок» для з'єднання деталі з робочою поверхнею, і взагалі їх необхідність;
- Менша швидкість нарощування моделей.

### 1.2.7 PolyJet

Принцип технології схожий з роботою звичайного струменевого принтера.

Розглянемо принцип роботи технології. Рідкий полімер через велику кількість сопел вкраплюється на робочу платформу і одразу ж під дією ультрафіолетового випромінювання застигає.

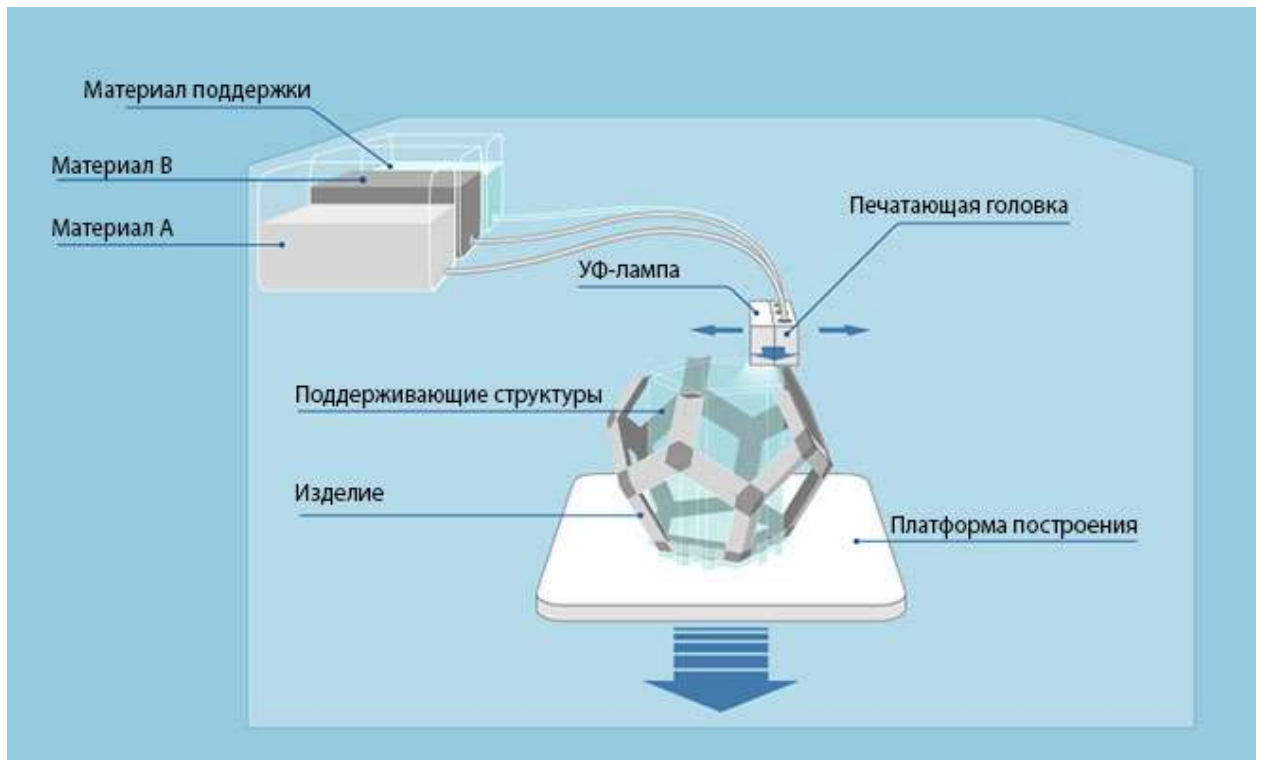


Рис. 1.8 – Будова PolyJet 3D принтера

Отримані вироби не потребують додаткової постобробки. Також технологія дозволяє змішувати в одній деталі різні матеріали по характеристикам, відповідно деякі моделі таких принтерів дозволяють змішувати матеріали для отримання різноманітних композитів.

Ціни на обладнання починаються від 100000\$.

Переваги технології:

- Висока точність виробів;
- Вища швидкість вирощування виробів, в порівнянні з конкурентними технологіями.

Недоліки:

- Висока ціна на обладнання, що перешкоджає поширенню технології;
- Наявність «підтримок»;
- Деградація матеріалу під сонячними променями.

### 1.2.8 Multi Jet Fusion (MJF)

Технологія розроблена компанією HP. Схожа за принципом роботи з SLS, але не використовує лазер.

Конструкція MJF 3D принтера схожа на SLS, але замість системи з лазером має дві рухомі частини: на першій закріплені друкуючі головки, які додають в матеріал «основи» реагенти, що покращують зв'язку матеріалу; на другій закріплено теплову лампу, яка в процесі проходження над робочою платформою розплавляє «основу» з вкрапленнями реагентів.

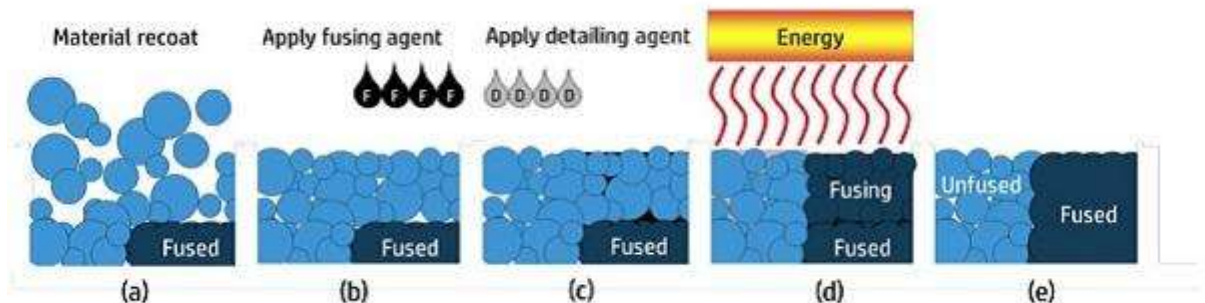


Рис. 1.9 – Принцип роботи MJF 3D принтера

Розглянемо принцип роботи технології. Розрівнювач наносить перший рівномірний шар порошку на робочу платформу. Після чого першим проходом додаються реагенти в місця утворення шару моделі, а потім ці місця розплавляються за допомогою теплової лампи. Платформа з порошком підіймається, а робоча платформа опускається на один шар виробу. Далі процес повторюється до отримання готового виробу.

Технологія дозволяє отримувати вироби з полімерних порошків набагато швидше, ніж за допомогою будь-якої іншої з вище описаних технологій. Також як і SLS не потребує «підтримок» оскільки використовує матеріал для друку в якості «підтримок».

Ціни на обладнання починаються від 50000\$ за 3D принтер та від 130000\$ за виробничу лінію.

Переваги технології:

- Значно швидше отримання готових виробів, в порівнянні з SLS технологією;
- Відсутність «підтримок» в процесі виготовлення виробів.

#### **1.2.9 Багатоструменеве моделювання (Multi Jet Modelling (MJM))**

Технологія схожа за принципом роботи на PolyJet.

Як і при PolyJet 3D друці, друкуюча головка з великою кількістю сопел протягом свого руху вкраплює полімер в відповідних областях, після чого він одразу ж засвітлюється УФ лампою, що призводить до його затвердіння.



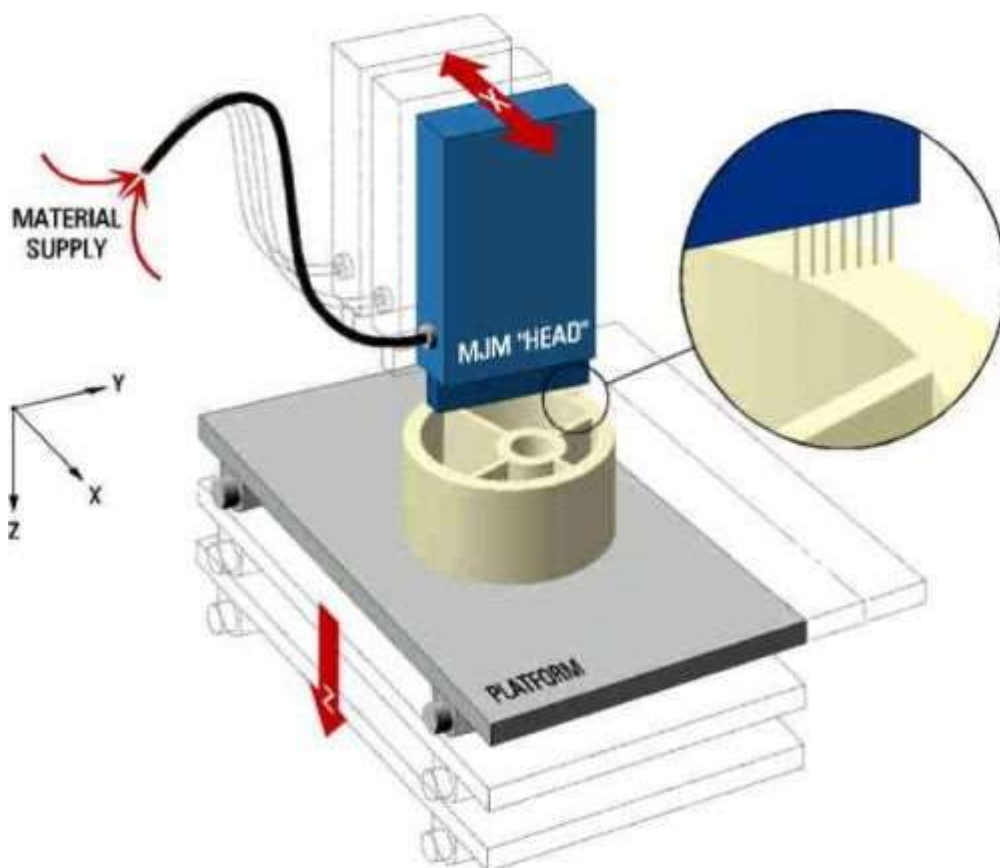


Рис. 1.9 – Будова MJM 3D принтера

На відміну від PolyJet, технологія MJM дозволяє використовувати в якості матеріалу для друку різні типи воску. Це дозволяє використовувати дану технологію в ливарному виробництві. Воскові моделі можна використовувати в якості мастер-моделей для лиття або виплавляємі мастер-моделі. Також віск може бути використаний, як допоміжний матеріал для створення «підтримок». На ринку існують моделі 3D принтерів, які здатні друкувати двохкомпонентним воском, матеріал «підтримок» в таких принтерах розплавляється у гарячій воді.

Технологія особливо популярна в ювелірному виробництві, коли потрібно швидко виготовити точну і якісну індивідуальну модель виробу, для подальшого виробництва.

Ціни на обладнання починаються від 100000\$.

Переваги технології:

- Висока точність побудови;
- Більша різноманітність матеріалів в порівнянні з PolyJet.

Недоліки:

- Висока ціна на обладнання, що перешкоджає поширенню технології;
- Наявність «підтримок»;
- Деградація матеріалу під сонячними променями.

### ***1.3 Методи підготовки виробів до «безсупортного» адитивного виробництва***

У роботі [6] був запропонований підхід, який полягає у заповненні вільних від матеріальну частинах, що знаходять під «нависаючими» елементами, системою тонких прямих «опор», що сходяться попарно на поверхні, розташованій вище цього об'єму. У цьому випадку кути нахилу «підтримок» та їх мінімальна товщина є змінними параметрами в цьому методі.

Альтернативний підхід до підготовки геометричної моделі деталі для «безсупортної» технології полягає в тому, що об'єми деталі без матеріалу обмежені поверхнями замінені еліптичною системою порожнин. Параметрами математичного алгоритму для цього підходу є відстань між еліпсами та обмеження їх розмірів. Очевидно, що, на відміну від підходу, викладеного в [6], результат такої конструкції менш чутливий до орієнтації деталі під час її адитивного виробництва. Деталь, отримана з еліптичними порожнинами, також є більш довговічною через відсутність концентраторів напружень, що особливо важливо для деталей, що працюють за змінних умов навантаження. Деталі з порожнинами простої геометричної форми є більш придатними для подальших «фінішних» технологічних операцій, що виконуються, наприклад, для поліпшення якості поверхонь деталей з метою підвищення її втомної міцності та довговічності. Більш принциповою відмінною рисою цього алгоритму є можливість його реалізації на стадії проектування деталі. І в поєднанні з існуючими алгоритмами оптимального

дизайну конструкції, орієнтованими на забезпечення міцності деталі при мінімізації її маси [7], цей алгоритм дозволяє створити систему автоматизованого проектування деталей для «безсупортного» адитивного виробництва з можливістю прогнозування на етапі проектування статичної/динамічної/втомної міцності залежно від типу експлуатаційних навантажень.

Згаданий вище алгоритм безпосередньо пов'язаний з вирішенням так званої задачі розмітки обчислювальної геометрії для еліпсів у відокремлених полігональних областях. У багатьох роботах розглядаються задачі оптимізації розміщення еліпсів. У роботі [8] представлені безперервні та диференційовані нелінійні моделі програмування та алгоритми упаковки еліпсоїдів у контейнер мінімальної площі (кубоїд та сфера). Представлені дві різні моделі для неперекривання та моделі для включення еліпсоїдів у напівпростори та еліпсоїди. Автори застосовують просту стратегію багатостартового запуску в поєднанні з розумним вибором стартових здогадок та локальним вирішувачем нелінійного програмування. Стаття [9] вводить квазі- $\phi$ -функції для аналітичного опису неперекривання та виключних обмежень для об'єктів, які можна безперервно обертати та переставляти. Ці нові функції можуть добре працювати для різних типів об'єктів, таких як еліпси, для яких звичайні  $\phi$ -функції занадто складні або ще не побудовані. Однак оптимізація повинна виконуватися за більшим набором параметрів, включаючи додаткові змінні, що використовуються новими функціями. У роботі вивчається задача розміщення даного набору еліпсів у прямокутному контейнері мінімальної площі. Розроблено математичну модель як задачу нелінійного програмування. Запропоновано ефективний алгоритм рішення для задачі розміщення еліпса. У роботі [10] розглядається така задача: набір еліпсів із заданими осями потрібно вирізати з прямокутної конструкційної пластини, мінімізуючи при цьому площу прямокутної деталі. Конструктивна плита визначається нижньою та верхньою межами її ширини та довжини; еліпси вільні від будь-яких

обмежень орієнтації. Представлено формулювання математичного програмування для цієї задачі вирізання еліпса. Для невеликої кількості еліпсів автори обчислюють можливі глобально-оптимальні точки, використовуючи глобальні вирішувачі. Для більш ніж 14 еліпсів у статті пропонуються «полілітичні» підходи, в яких еліпси послідовно додаються в смужку для прямокутника з обмеженою шириною, але необмеженою довжиною. Площа прямокутника мінімізована на кожному кроці жадібного алгоритму. Зокрема, в [11] автори представляють модель та підхід чисельного рішення для упаковки еліпсів в оптимізований правильний багатокутник. Стратегія оптимізації базується на концепції вбудованих множників Лагранжа. У цій лагранжській обстановці апофема (а отже і площа) правильного багатокутника оптимізується, не допускаючи перекриття еліпсів. Вони одночасно рухаються до цих цілей, використовуючи систему “LGO-solver” для глобально-локальної нелінійної оптимізації. Чисельні результати, наведені в роботі, демонструють придатність вбудованих множників Лагранжа на основі модельного підходу в поєднанні з глобальною оптимізацією для вирішення широкого класу задач із високим рівнем впуклості еліпсів.

## ***1.4 Висновки***

Розглянувши існуючі технології адитивного виробництва можна зробити висновок, що для виготовлення металевих виробів, є передумови для оптимізації. Частиною виробництва, яка суттєво впливає на час виробництва, його собівартість і якість отримуваних поверхонь є наявність «підтримок» у виробках. Необхідно зменшити кількість «підтримок», оскільки часто на них витрачається багато матеріалу, що підвищує собівартість виробництва деталі.

Розглянувши наявні дослідження, робимо висновок, що дослідження виконуються з великою кількістю обмежень або для обмеженої кількості елементів. Також в переглянутих роботах не було використано обмежень (мінімальна товщина стінки (що впливає на щільність упакування вибраної

області), максимальний кут нахилу «нависаючих» елементів, мінімальний/максимальний радіус кривизни (утворений перетином внутрішніх поверхонь)) обумовлених технічними можливостями обладнання для адитивного виробництва.

**Метою даної роботи** є підвищення ефективності підготовки моделей до «безсупортного» адитивного виробництва.

**Завдання** – розробити алгоритм, що дозволить ефективніше оптимізувати вироби для «безсупортного» адитивного виробництва. Тобто зменшити масу отримуваних деталей, зменшити кількість додаткових «підтримуючих» структур під час виробництва, що дозволить зменшити витрати на додаткові матеріали, скоротити кількість операцій та зменшити собівартість виробництва.

У дослідженні розглянемо нову задачу оптимального пакування еліпсів у відокремленій багатокутній області з опуклими компонентами зв'язності. Розроблено алгоритм для цієї задачі, що дозволяє реалізувати підготовку деталі для «безсупортного» адитивного виробництва з метою мінімізації маси готової деталі. Початкові параметри алгоритму враховуватимуть технічні вимоги/обмеження виробничого обладнання (мінімальна товщина стінки, мінімальний/максимальний радіус кривизни обмежений внутрішніми поверхнями тощо) [12]. Слід зазначити, що початкова геометрія деталі була отримана методом топологічної оптимізації.

## 2 РОЗРОБКА АЛГОРИТМУ ОПТИМІЗАЦІЇ ВИРОБУ ДЛЯ «БЕЗСУПОРТНОГО» АДИТИВНОГО ВИРОБНИЦТВА

### 2.1 Постановка задачі для розроблення алгоритму

Опишемо полігональну область об'єднанням кінцевого числа непересічних опуклих багатокутників:  $\Omega = \bigcap_{q=1}^N \mathbf{P}_q$ ,  $\mathbf{P}_{q_1} \cap \mathbf{P}_{q_2} = \emptyset$  ( $q_1, q_2 \in I_N = \{1, \dots, N\}$ ,  $q_1 < q_2$ ), де  $\mathbf{P}_q$  – це опуклий багатокутник.

Розглянемо сімейство еліпсів  $\mathbf{E}$  із змінними піввісями  $a \leq a'$ ,  $b \geq b'$  ( $a \geq b$ ), де  $a'$ ,  $b'$  – це задані константи, тобто  $\mathbf{E} = \{E | a \geq b, a \leq a', b \geq b'\}$ .

Наша мета створити  $N$  підмножин еліпсів  $\mathbf{E}^q = \{E_i^q \in \mathbf{E}, i \in J^q\}$  ( $q \in I_N$ ,  $q \in I_N$ ), які можна повністю розташувати без перекривань всередині відповідних опуклих багатокутників  $\mathbf{P}_q$  ( $q \in I_N$ ), з максимальним коефіцієнтом упаковки.

Крім того, маємо мінімально допустиму відстань  $> 0$  між кожною парою еліпсів  $E_i^q$  і  $E_j^q$ , ( $i, j \in J^q; i > j$ ).

Підмножина  $\mathbf{E}^q$  рухомих еліпсів змінного розміру позначається  $\mathbf{E}^q(u^q) = \{E_i^q(u_i^q), i \in J^q\}$ , де  $u^q = (u_1^q, u_2^q, \dots, u_{n_q}^q) \in \mathbf{R}^{5n_q}$  – вектор змінних параметрів еліпсів  $E_i^q(u_i^q)$  ( $i \in J^q$ ),  $u_i^q = (x_i^q, y_i^q, \theta_i^q, a_i^q, b_i^q)$ ,  $v_i^q = (x_i^q, y_i^q)$  – вектор переміщення;  $\theta_i^q$  – кут повороту;  $a_i^q, b_i^q$  є піввісями еліпса  $E_i^q$ .

#### *Задача розміщення еліпса у відокремленій полігональній області.*

Необхідно знайти такі підмножини еліпсів  $\mathbf{E}^q(u^{q*})$ ,  $u^{q*} = (u_1^{q*}, u_2^{q*}, \dots, u_{n_q}^{q*})$  ( $q \in I_N$ ), які можна повністю розташувати в межах відповідних опуклих багатокутників  $\mathbf{P}_q$  ( $q \in I_N$ ), з максимальною займаною площею  $F_q^*(u^{q*}) = \pi \sum_{i=1}^{n_q^*} a_i^{q*} b_i^{q*}$ , враховуючи задану мінімально допустиму відстань  $\rho$  між еліпсами.

Значення  $F^*(u^*) = \sum_{q=1}^N F_q^*(u^{q*})$  приймається як вирішення задачі максимального заповнення всієї відокремленої області  $\Omega$ , де  $u^* = (u^{1*}, u^{2*}, \dots, u^{N*})$ .

Задача може бути зведена до послідовності  $N$  незалежних розташувань для кожного  $q \in I_N$  з наступних компонувань.

### ***Задача розміщення еліпса в опуклому багатокутнику.***

Необхідно знайти такі  $u^{q*}$  і  $n_q^*$ , щоб еліпси  $E_i^q(u_i^{q*}) \in E^q$  ( $i \in I_{n_q^*}$ ) були упаковані в опуклий багатокутник  $P_q$ , беручи до уваги обмеження відстані між еліпсами, так що коефіцієнт упаковки досяг свого максимального значення.

У задачі РЕО виконуються такі умови:

- Обмежувальні умови:  $E_i^q(u_i^q) \subset P_q$  для кожного  $i \in I_{n_q}$ ;
- Обмеження відстані для еліпсів  $E_i^q(u_i^q)$  та  $E_j^q(u_j^q)$ :

$$\text{dist}(E_i^q(u_i^q), E_j^q(u_j^q)) \geq \rho \text{ для кожного } i < j \in I_{n_q},$$

$$\text{де } \text{dist}(E_i^q, E_j^q) = \min_{e_i \in E_i^q, e_j \in E_j^q} \text{dist}(e_i, e_j); \rho > 0; \text{dist}(e_i, e_j) - \text{евклідова}$$

відстань між цими двома точками  $e_i, e_j$ .

У цьому дослідженні ми використовуємо техніку  $\phi$ -функції [13-16] як потужний інструмент математичного моделювання обмежень компонування.

Використаємо нормалізовану  $\phi$ -функцію для опису обмежувальних умов та нормалізовану квазі- $\phi$ -функцію для опису неперекриваючих обмежень, беручи до уваги мінімальну допустиму відстань між еліпсами.

## ***2.2 $\Phi$ -функція для обмежувальних обмежень***

### ***2.1.1 Обмеження еліпса $E_i(u_i)$ для РЕВПО***

Нехай  $\Omega = \cap_{q=1}^N P_q$ ,  $P_{q_1} \cap P_{q_2} = \emptyset$  ( $q_1, q_2 \in I_N = \{1, \dots, N\}$ ,  $q_1 < q_2$ ), де  $P_q$  - опуклий багатокутник.

Визначимо  $\phi$ -функцію  $E_i(u_i)$  та об'єкт  $\Omega^* = R^2 \setminus \text{int}\Omega$  у вигляді:

$$\Phi^{E_i\Omega^*}(u_i) = \max_{q \in I_N} \Phi^{E_i\mathbf{P}_q^*}(u_i), \quad (1)$$

де  $u_i = (x_i, y_i, \theta_i, a_i, b_i)$ ,  $\Phi^{E_i\mathbf{P}_q^*}(u_i)$  – це  $\phi$ -функція  $E_i(u_i)$  та об'єкт  $\mathbf{P}_q^* = R^2 \setminus \text{int}\mathbf{P}_q$ .

Для того, щоб визначити функцію  $\phi$  для простоти, ми опустимо індекс опуклого багатокутника.

### 2.1.2 Обмеження еліпса $E_i(u_i)$ для РЕОБ

Нехай  $\mathbf{P}$  – це опуклий багатокутник поданий у вигляді  $\mathbf{P} = \bigcap_{s=1}^m P_s$ , де  $P_s = \{(x, y): \mu_s = x \cdot \cos\phi_s + y \cdot \sin\phi_s + \gamma_s \geq 0\}$  дорівнює половині площини  $E_i(u_i)$ ;  $\phi_s = \text{const}$ ;  $\gamma_s = \text{const}$ ;  $L_s = \{(x, y): \mu_s = 0\}$ ;  $\mu_s = 0$  є нормальним рівнянням  $s$ -ої частини  $\mathbf{P}$  ( $s \in I_m$ ).

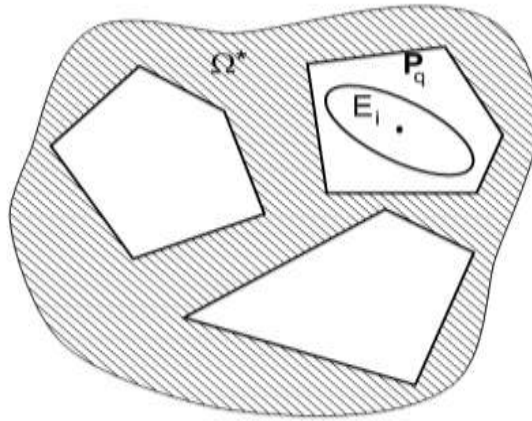


Рис. 2.1 – Еліпс  $E_i(u_i)$  та об'єкт  $\Omega^*$

$\phi$ -функцію еліпса  $E_i(u_i)$  з сімейства  $\mathbf{E}$  та об'єкта  $\mathbf{P}^*$  можна визначити вигляді:

$$\Phi^{E_i\mathbf{P}^*}(u_i) = \min\{\Phi_{is}^*(u_i), s \in I_m\}, \quad (2)$$

де

$$\Phi_{is}^*(u_i) = \delta_{is}(v_i) - d_{is}(\theta_i, a_i, b_i), \quad (3)$$



це  $\phi$ -функція еліпса  $E_i(u_i)$  і напівплощини  $P_s^* = R^2 \setminus \text{int} P_s$ ;  
 $u_i = (x_i, y_i, \theta_i, a_i, b_i)$ ;  $\delta_{is}(v_i) = x_i \cos \phi_s + y_i \sin \phi_s + \gamma_s$ ;  $d_{is}(\theta_i, a_i, b_i) =$   
 $\sqrt{a_i^2 \cdot \cos^2(\theta_i + \phi_s) + b_i^2 \cdot \sin^2(\theta_i + \phi_s)}$ .

Нерівність  $\Phi_{is}^*(u_i) \geq 0$  забезпечує неперекривання  $E_i(u_i)$  і  $P_s$ .

Отже, згідно (2), нерівність  $\Phi^{E_i P^*}(u_i) \geq 0$  забезпечує обмежувальні умови  $E_i(u_i) \subset \mathbf{P}$ , тобто  $\text{int} E_i(u_i) \cap \text{int} \mathbf{P}^* = \emptyset$ .

### 2.3 Нормалізована квазі- $\phi$ -функція для неперекриваючих обмежень

Побудуємо нормалізовану квазі- $\phi$ -функцію для еліпсів  $E_i(u_i)$  і  $E_j(u_j)$  із змінними параметрами розташування та розмірами, де  $u_i = (x_i, y_i, \theta_i, a_i, b_i)$ ,  $u_j = (x_j, y_j, \theta_j, a_j, b_j)$ .

Основна ідея базується на наступному твердженні: якщо два еліпси не перетинаються один з одним, то існує пряма лінія, що проходить через центр системи координат, така що проекції еліпсів на цій прямій не перетинаються одна з одною. Насправді нехай два еліпси не мають спільних внутрішніх точок. Тоді існує лінія, що розділяє площину на дві напівплощини таким чином, що два еліпси лежать у різних напівплощинах. Отже, проекції еліпсів на будь-якій прямій, яка перпендикулярна до розділової лінії, не мають спільних внутрішніх точок.

Позначимо пряму  $L_{ij}^\perp$ , яка перпендикулярна до розділюючої лінії  $L_{ij}$  та проходить через початок координат  $O$ . Нехай  $\phi_{ij}$  – це кут між прямою  $L_{ij}^\perp$  і віссю  $OX$ . І нехай  $E_{ij}$  і  $E_{ji}$  будуть проекціями (відрізками ліній з відповідними центрами  $t_{ij} = (x_{ij}, y_{ij})$  і  $t_{ji} = (x_{ji}, y_{ji})$ ) еліпсів  $E_i(u_i)$  і  $E_j(u_j)$ .

Пристосована квазі- $\phi$ -функція  $\Phi'^{E_i E_j}(u_i, u_j, \phi_{ij})$  еліпсів  $E_i(u_i)$  та  $E_j(u_j)$  з сімейства може бути визначена у вигляді:

$$\begin{aligned} \Phi^{E_i E_j}(u_i, u_j, \phi_{ij}) = & x'_{ij}(v_i, \phi_{ij}) - x'_{ji}(v_j, \phi_{ij}) - d_{ij}(\theta_i, \phi_{ij}, a_i, b_i) - \\ & - d_{ji}(\theta_j, \phi_{ij}, a_j, b_j) \end{aligned} \quad (4)$$

де  $x'_{ij}(v_i, \phi_{ij}) = x_i \cos \phi_{ij} - y_i \sin \phi_{ij}$ ,  $x'_{ji}(v_j, \phi_{ij}) = x_j \cos \phi_{ij} - y_j \sin \phi_{ij}$ ,

$$d_{ij}(\theta_i, \phi_{ij}, a_i, b_i) = \sqrt{a_i^2 \cos^2(\theta_i - \phi_{ij}) + b_i^2 \sin^2(\theta_i - \phi_{ij})}, \quad d_{ji}(\theta_j, \phi_{ij}, a_j, b_j) = \sqrt{a_j^2 \cos^2(\theta_j - \phi_{ij}) + b_j^2 \sin^2(\theta_j - \phi_{ij})}.$$

Тепер покажемо, що квазі- $\rho$ -функція (4) є нормованою, тобто  $\max_{\phi_{ij}} \Phi^{E_i E_j}(u_i, u_j, \phi_{ij})$  є скоригованою  $\rho$ -функцією еліпсів  $E_i(u_i)$  та  $E_j(u_j)$  з сімейства **E**.

Припустимо, що  $\text{dist}(E_i(u_i), E_j(u_j)) \geq \rho$ . Це означає, що існує щонайменше дві точки  $e_i \in E_i$  і  $e_j \in E_j$ , такі що  $\text{dist}(e_i, e_j) = \rho$  (рис. 2.2).

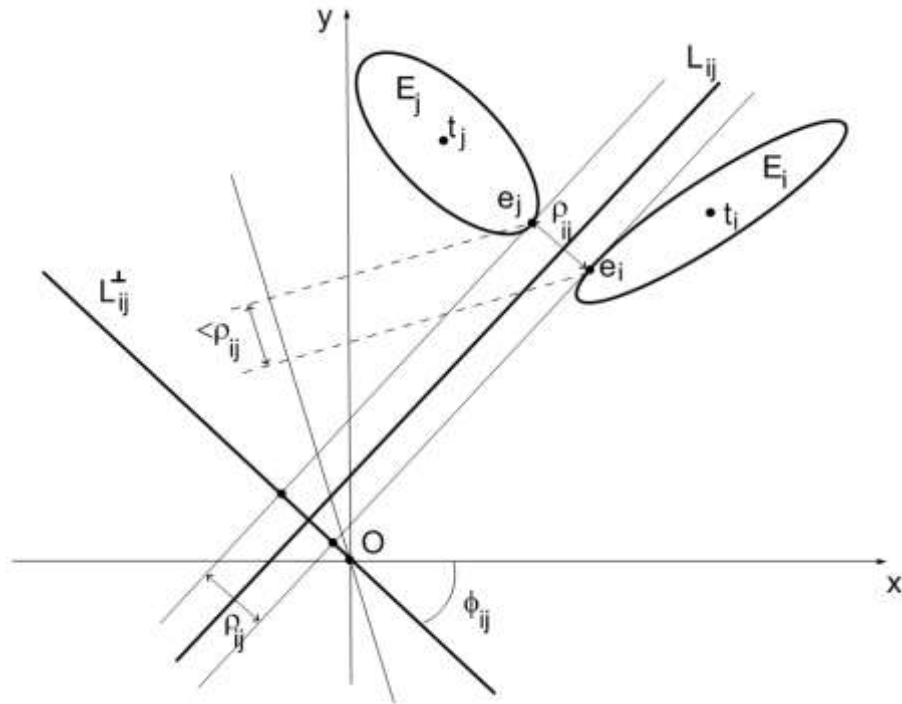


Рис. 2.2 – Ілюстрація до пристосованої квазі- $\rho$ -функції

Побудуємо відрізок  $e_i e_j$ . Зверніть увагу, що відрізок  $e_i e_j$  повинен бути паралельний нормалі до еліпса  $E_i$  в точці  $e_i$ , а також, до нормалі еліпса  $E_j$  в точці  $e_j$ . Тоді, прямою, яка проходить через точку  $O$  і паралельна відрітку  $e_i e_j$ , можна обрати пряму  $L_{ij}^\perp$ . Очевидно, що відстань між проекціями точок  $e_i$  і  $e_j$  на прямій  $L_{ij}^\perp$  дорівнює  $\rho$ , і що для будь-якого іншого кута нахилу відстань між проекціями точок на пряму буде менше.

Слід зазначити, що квазі- $\phi$ -функція (4) набагато простіша, ніж квазі- $\phi$ -функція для двох еліпсів, розглянутих у [13]. Вона містить лише одну допоміжну змінну (у порівнянні з чотирма змінними у [13]) та лише одну функцію (у порівнянні з шістьма функціями у [13]).

Таким чином, виходячи з особливостей скоригованої квазі- $\phi$ -функції [13], ми можемо зробити висновок, що  $\Phi'^{E_i E_j}(u_i, u_j, \phi_{ij}) \geq \rho$  передбачає  $\text{dist}(E_i(u_i), E_j(u_j)) \geq \rho$ .

## 2.4 Математична модель РЕВПО

Розглянемо групу еліпсів  $E_i$  ( $i \in I_n$ ) з  $\mathbf{E}$ , де  $n = \sum_{q=1}^N \left\lfloor \frac{S_q}{\pi b'^2} \right\rfloor$ ,  $S_q$  – площа  $\mathbf{P}_q \subset \Omega$ .

Проблему РЕВПО можна сформулювати у вигляді наступної ЗЦЗ:

$$(g^*, u^*, \phi^*) = \arg \max_{(g, u, \phi) \in W \subset R^\sigma} F(g, u, \phi), \quad (5)$$

$$W = \{(g, u, \phi) \in R^\sigma: g_i \cdot g_j \cdot \Phi'^{E_i E_j}(u_i, u_j, \phi_{ij}) - g_i \cdot g_j \cdot \rho \geq 0, i < j \in I_n, \quad (6)$$

$$g_i \cdot \Phi^{E_i \Omega^*}(u_i) \geq 0, a_i \geq b_i, b_i \geq b', a_i \leq a', i \in I_n\},$$

Де  $F(g, u, \phi) = \pi \sum_{i=1}^n g_i \cdot a_i \cdot b_i$ ;  $g = (g_1, \dots, g_n)$ ,  $g_i \in \{0, 1\}$ ;  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ ,  $u_i = (x_i, y_i, \theta_i, a_i, b_i)$ ;  $\phi = (\phi_{12}, \phi_{13}, \dots, \phi_{n, n-1})$ ;

$\sigma = 6n + \frac{n(n-1)}{2}$ ,  $\Phi'^{E_i E_j}(u_i, u_j, \phi_{ij})$  скоригована  $\phi$ -функція для еліпсів  $E_i(u_i)$

і  $E_j(u_j)$  визначена в (4);  $\Phi^{E_i\Omega^*}(u_i)$  –  $\phi$ -функція для еліпса  $E_i(u_i)$  та об'єкта  $\Omega^*$  визначена у (1).

Ця модель також може бути застосована для розміщення кіл змінного радіусу. У цьому конкретному випадку ми встановлюємо  $a_i = b_i = r_i$  і замінюємо: квазі- $\phi$ -функцію  $\Phi'^{E_iE_j}(u_i, u_j, \phi_{ij})$  відрегульованою  $\phi$ -функцією  $\Phi'^{C_iC_j}(x_i, y_i, r_i, x_j, y_j, r_j)$  для двох кіл  $C_i(x_i, y_i, r_i)$  і  $C_j(x_j, y_j, r_j)$ ;  $\phi$ -функцію  $\Phi^{E_i\Omega^*}(u_i)$  на  $\phi$ -функцію  $\Phi^{C_i\Omega^*}(x_i, y_i, r_i)$  для кола  $C_i(x_i, y_i, r_i)$  та об'єкта  $\Omega^*$ . Кількість змінних задачі кругового компонування становить  $\sigma = 3n$ .

На основі (1) ми можемо переформулювати задачу (5) - (6) у вигляді послідовності підзадач компонування еліпсів у опуклому багатокутнику  $\mathbf{P}_q$  ( $q \in I_N$ ) (задача РЕОБ).  $q$ -ту підзадачу описано в наступному підрозділі.

## 2.5 Змішана цілочисельна модель РЕОБ

Розглянемо групу еліпсів  $E_i^q$  ( $i \in I_{n_q}$ ), з розмірами  $a_i^q$  та  $b_i^q$  ( $i \in I_{n_q}$ ), де  $n_q = \left\lfloor \frac{S_q}{\pi b'^2} \right\rfloor$ ,  $S_q$  – площа  $\mathbf{P}_q$ .

Проблему РЕОБ можна сформулювати у вигляді ЗЦЗ:

$$(g^q, u^q, \phi^q) = \arg \max_{(g^q, u^q, \phi^q) \in W_q \subset R^{\sigma_q}} F_q(g^q, u^q, \phi^q), \quad (7)$$

$$W_q = \{(g^q, u^q, \phi^q) \in R^{\sigma_q} : g_i^q \cdot g_j^q \cdot (\Phi'^{E_iE_j}(u_i^q, u_j^q, \phi_{ij}^q) - \rho) \geq 0, i < j \in I_{n_q}, \quad (8)$$

$$g_i^q \cdot \Phi^{E_i\mathbf{P}_q^*}(u_i^q) \geq 0, a_i^q \geq b_i^q, b_i^q \geq b', a_i^q \leq a', i \in I_{n_q}\},$$

$$\text{де} \quad F_q(g^q, u^q, \phi^q) = \pi \sum_{i=1}^{n_q} g_i^q \cdot a_i^q \cdot b_i^q; \quad g^q = (g_1^q, \dots, g_{n_q}^q);$$

$$u^q = (u_1^q, u_2^q, \dots, u_{n_q}^q); \quad u_i^q = (x_i^q, y_i^q, \theta_i^q, a_i^q, b_i^q); \quad \phi^q = (\phi_{12}^q, \phi_{13}^q, \dots, \phi_{n_q, n_q-1}^q);$$

$$\sigma_q = 6n_q + \frac{n_q(n_q-1)}{2}; \quad g_i^q \in \{0,1\}, \quad \Phi'^{E_iE_j} - \text{скоригована квазі-}\phi\text{-функція для}$$

$$\text{еліпсів } E_i(u_i^q) \text{ і } E_j(u_j^q) \text{ визначеною в (4); } \Phi^{E_i\mathbf{P}_q^*} - \text{це } \phi\text{-функція для еліпса}$$

$$E_i(u_i^q) \text{ і об'єкта } \mathbf{P}_q^* \text{ визначені в (2).}$$

Реалізуємо модель ЗЦЗ (7) - (8) за допомогою послідовності  $n_q$  підзадач НЛП з  $t = 1, 2, \dots, n_q$  еліпсів. Кожна підзадача ЗРЕ шукає параметри розміщення та розміри максимальної сумарної площі  $t$  еліпсів у межах опуклого багатокутника  $\mathbf{P}_q$ .

## 2.6 Нелінійна безперервна модель ЗРЕ

Тепер припустимо, що  $E_i^q \in \mathbf{E}^q$  ( $i \in I_t$ ), і введемо таку підзадачу НЛП:

$$(u^q, \phi^q) = \arg \max_{(u^q, \phi^q) \in W_q \subset R^\sigma} F_q(u^q, \phi^q); \quad (9)$$

$$W_q = \{(u^q, \phi^q) \in R^\sigma : \Phi'^{E_i^q E_j^q}(u_i^q, u_j^q, \phi_{ij}^q) \geq \rho, (i, j) \in \mathcal{E}; \quad (10)$$

$$\Phi^{E_i^q \mathbf{P}_q^*}(u_i^q) \geq 0, a_i^q \geq b_i^q, b_i^q \geq b', a_i^q \leq a', i \in I_t\},$$

де  $F_q(u^q, \phi^q) = \pi \sum_{i=1}^t a_i^q b_i^q$ ;  $u^q = (u_1^q, \dots, u_t^q)$ ;  $\phi^q = (\phi_{12}^q, \dots, \phi_{t-1,t}^q)$ ;

$u_i^q = (x_i^q, y_i^q, \theta_i^q, a_i^q, b_i^q)$ ;  $\sigma = 5t + \frac{t(t-1)}{2}$ ;  $\mathcal{E} = \{(i, j) : i < j \in I_t\}$ ;

$\Phi'^{E_i^q E_j^q}(u_i^q, u_j^q, \phi_{ij}^q)$  визначено в (4);  $\Phi^{E_i^q \mathbf{P}_q^*}(u_i^q)$  визначено в (2).

Локальну оптимальну точку, знайдену для задачі (9) - (10), позначимо  $(u^q, \phi^q)$ .

## 2.7 Алгоритм для задачі РЕВПО

Створений алгоритм для рішення задачі РЕВПО реалізує модель (5) - (6) і може бути описаний наступними кроками:

*Крок 1.* Встановити  $q = 1$ .

*Крок 2.* Встановити  $t = 1, f_q = 1$ .

*Крок 3.* Розв'язати задачу (9) - (10) (ЗРЕ).

*Крок 4.* Якщо рішення знайдено, переходимо до кроку 5, інакше необхідно встановити  $n^q = t - 1$  і переходимо до кроку 6.

*Крок 5.* Якщо  $F_q(u^{q*}, \phi^{q*}) > f_q$ , то  $f_q = F_q(u^{q*}, \phi^{q*})$ ,  $\bar{u}^q = u^{q*}$ ,  $t = t + 1$  і переходимо до кроку 3, в іншому випадку  $n^q = t - 1$  і переходимо до наступного кроку.

*Крок 6.* Якщо  $q < N$ , то  $q = q + 1$  і переходимо до кроку 2, в іншому випадку переходимо до наступного кроку.

*Крок 7.* Встановлюємо  $n = \sum_{q=1}^N n_q$  і сформуємо вектор  $u^* = (\bar{u}^1, \dots, \bar{u}^n)$ , який відповідає локальній точці максимуму задачі (5) - (6). Знаходимо  $F(u^*, \phi^*) = \sum_{q=1}^N f_q$ .

## **2.8 Стратегія рішення ЗРЕ**

Представлена стратегія рішення для ЗРЕ складається з трьох основних етапів:

*Етап 1.* Формуємо ряд можливих вихідних точок задачі (9) - (10), використовуючи алгоритм, описаний у підрозділі 2.9.

*Етап 2.* Пошук локального максимуму задачі (9) - (10), починаючи з кожної точки, отриманої на Етапі 1, використовуючи алгоритм, описаний у підрозділі 2.10.

*Етап 3.* Обираємо найкращий локальний максимум із тих, що знайдені на Етапі 2.

Для простоти опускаємо показник опуклого многокутника у задачі (9) - (10).

## **2.9 Запуск алгоритму можливих параметрів**

Тепер опишемо алгоритм генерації можливих вихідних точок задачі (9) - (10). Нехай  $\mathbf{P}$  задається його вершинами  $p_s = (x_s^p, y_s^p)$  ( $s \in I_m$ ).

*Крок 1.* В межах  $\mathbf{P}$ , формуємо набір з  $n$  випадково вибраних центрів  $v_i^0 = (x_i^0, y_i^0)$  еліпсів  $E_i$  ( $i \in I_n$ ), використовуючи формулу:

$$v_i^0 = \sum_{s=1}^m \alpha_{is} p_s, \sum_{s=1}^m \alpha_{is} = 1, 0 \leq \alpha_{is} \leq 1, s \in I_m$$

Щоб знайти  $\alpha_{is}, s \in I_m$  випадковим чином генеруємо  $m$  додатних чисел  $n_{is}$  ( $s \in I_m$ ) та відхиляємо  $\alpha_{is} = \frac{n_{is}}{\sum_{s=1}^m n_{is}}$  ( $s \in I_m$ ).

*Крок 2.* Формуємо набір кіл  $C_i$  ( $s \in I_n$ ), змінного радіуса  $\lambda b'$  та центрів  $v_i^0$  ( $s \in I_n$ ), де  $\lambda$  – змінний гомотетичний коефіцієнт (параметр масштабування).

*Крок 3.* Вирішити підзадачу оптимізації, починаючи з точки  $(v^0 = (v_1^0, \dots, v_n^0), \lambda^0 = 0)$ :

$$\lambda^* = \max_{(v, \lambda) \in V \subset R^{2n+1}} \lambda,$$

$$V = \{(v, \lambda) \in R^{2n+1}: \Phi^{C_i C_j}(v_i, v_j, \lambda) \geq 0, (i, j) \in E, \Phi^{C_i P^*}(v_i, \lambda) \geq 0, i \in I_n, 0 \leq \lambda \leq 1\},$$

де

$$v = (v_1, v_2, \dots, v_n), v_i = (x_i, y_i),$$

$$\Phi^{C_i C_j}(v_i, v_j, \lambda) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 - \lambda^2 \cdot (2b' + \rho)^2,$$

це відрегульована  $\phi$ -функція [15] для двох кіл  $C_i$  та  $C_j$  із змінним радіусом  $\lambda b'$ ,

$$\Phi^{C_i P^*}(v_i, \lambda) = \min_{s=1, \dots, m} (x_i \cdot \cos \phi_s + y_i \cdot \sin \phi_s + \gamma_s - \lambda b'),$$

це скоригована  $\phi$ -функція для кола  $C_i$  змінного радіуса  $\lambda b'$  та об'єкта  $\mathbf{P}^*$ .

Якщо  $\lambda^* < 1$  то можливої початкової точки не знайдено, і ми припиняємо процес, в іншому випадку переходимо до наступного кроку.

*Крок 4.* Випадковим чином генеруємо параметри обертання  $\theta_i^1 \in [0, \pi)$  еліпсів  $E_i$  ( $i \in I_n$ ).

*Крок 5.* Повернемо вектор  $u^1 = (u_1^1, \dots, u_n^1)$ , де  $u_i^1 = (v_i^1, \theta_i^1, a_i^1 = b', b_i^1 = b')$  в якості вихідних параметрів для локального алгоритму оптимізації (див. наступний підрозділ).

Для великої кількості еліпсів задачу (9) - (10) неможливо вирішити шляхом прямого використання сучасних НЛП-вирішувачів, навіть починаючи з реальної точки. Тому запропоновано ітеративний алгоритм оптимізації для пошуку локальних максимумів задачі як нову модифікацію процедури LOFRT, введену в [13] для проблеми упаковки еліпсів у прямокутник мінімальної площі.

## **2.10 Локальний алгоритм оптимізації**

Алгоритм зводить великомасштабну задачу (9) - (10) до послідовності нелінійних підзадач програмування меншої розмірності ( $O(n)$  змінних та нелінійних обмежень). Ключова ідея алгоритму полягає в наступному. Для кожного вектора можливих параметрів розміщення еліпсів ми будемо нерухомі прямокутні  $\varepsilon$ -контейнери ( $\varepsilon > 0$  крок розкладання алгоритму). Потім дозволяємо кожному еліпсу рухатися в межах відповідного  $\varepsilon$ -контейнера. Опишемо рух кожного еліпса системою з чотирьох  $\varepsilon$ -нерівностей. Потім формуємо підмножину можливого набору  $W_q$  наступним чином: додаємо  $O(n)$   $\varepsilon$ -нерівності (для всіх еліпсів) до обмежень (10), а потім видаляємо  $O(n^2)$   $\phi$ -нерівності, що відповідають парам еліпсів з окремими контейнерами, що не перекриваються. Деякі надлишкові обмеження утримання також видаляються.

Видаляючи квазі- $\phi$ -функції для деяких пар еліпсів, також видаляємо відповідні допоміжні змінні. Це призводить до зменшення кількості змінних у підзадачі. Потім шукаємо локальний максимум для підзадачі з  $O(n)$  змінних та нелінійних обмежень. Далі цей локальний максимум використовується як відправна точка для наступної ітерації. На останній ітерації алгоритму знаходимо локальний максимум задачі (9) - (10).



Розглянемо алгоритм більш детально. Нехай  $u^1$  буде однією з точок, знайдених алгоритмом задачі АМП. Тепер опишемо локальний алгоритм оптимізації, який є ітеративною процедурою декомпозиції. Позначаємо значення кроку декомпозиції алгоритму через  $\varepsilon$  і припускаємо, що  $\varepsilon = S/\pi n \cdot b'^2$ , де  $S$  - площа контейнера  $\mathbf{P}$ .

*Крок 1.* Нехай  $k = 1$ .

*Крок 2.* Будуємо нерухомий прямокутний  $\varepsilon$ -контейнер  $\Omega_i^k \supset E_i(u_i^k)$  з розмірами  $2 \cdot a_i + \rho + \varepsilon$  і  $2 \cdot b_i + \rho + \varepsilon$  з центральною точкою  $v_i^k$  для кожного  $i \in I_n$ .

*Крок 3.* Створюємо систему допоміжних обмежень нерівності кожного еліпса  $E_i$ , що дозволяють еліпсу рости і рухатися всередині  $\varepsilon$ -контейнера  $\Omega_i^k$ , використовуючи  $\phi$ -функцію еліпса  $E_i(u_i)$  та  $\Omega_i^{k*} = R^2 \setminus \text{int} \Omega_i^k$  вигляду:

$$\Phi^{E_i \Omega_i^{k*}}(u_i) = \min\{f_{i1}^k(u_i), f_{i2}^k(u_i), f_{i3}^k(u_i), f_{i4}^k(u_i)\},$$

Де  $f_{i1}^k(u_i) = (x_i - x_i^k) \cdot \cos \theta_i^k + (y_i - y_i^k) \cdot \sin \theta_i^k + \Delta_{i1}^k$ ;

$$f_{i2}^k(u_i) = -(x_i - x_i^k) \cdot \cos \theta_i^k - (y_i - y_i^k) \cdot \sin \theta_i^k + \Delta_{i1}^k;$$

$$f_{i3}^k(u_i) = (x_i - x_i^k) \cdot \sin \theta_i^k - (y_i - y_i^k) \cdot \cos \theta_i^k + \Delta_{i3}^k;$$

$$f_{i4}^k(u_i) = -(x_i - x_i^k) \cdot \sin \theta_i^k + (y_i - y_i^k) \cdot \cos \theta_i^k + \Delta_{i3}^k;$$

$$\Delta_{i1}^k = a_i + 0.5(\rho + \varepsilon) - \sqrt{a_i^2 \cos^2(\theta_i + \theta_i^k) + b_i^2 \sin^2(\theta_i + \theta_i^k)};$$

$$\Delta_{i3}^k = b_i + 0.5(\rho + \varepsilon) - \sqrt{a_i^2 \sin^2(\theta_i + \theta_i^k) + b_i^2 \cos^2(\theta_i + \theta_i^k)}.$$

Зазначимо, що  $v^k = (x^k, y^k)$ ,  $\theta^k$  є константами. Таким чином, нерівність  $\Phi^{E_i \Omega_i^{k*}}(u_i) \geq 0$  еквівалентна системі чотирьох нерівностей  $f_{il}^k(u_i) \geq 0$  ( $l = \overline{1,4}$ ,  $i \in I_n$ ).

*Крок 4.* Побудуємо набір показників, який включає такі пари  $(i, j)$  еліпсів  $E_i(u_i)$  і  $E_j(u_j)$  для яких  $\varepsilon$ -контейнери  $\Omega_i^k$  та  $\Omega_j^k$  перекривають один одного, тобто

$$\Xi^k = \{(i, j): \Phi^{\Omega_i^k \Omega_j^k}(u_i^k, u_j^k) < 0, i > j \in I_n\},$$

де  $\Phi^{\Omega_i^k \Omega_j^k}(u_i^k, u_j^k)$  –  $\phi$ -функція для  $\Omega_i^k(u_i^k)$  та  $\Omega_j^k(u_j^k)$  [14].

Якщо два  $\varepsilon$ -контейнери  $\Omega_i^k$  та  $\Omega_j^k$  не мають спільних внутрішніх точок (тобто  $\Phi^{\Omega_i^k \Omega_j^k}(u_i^k, u_j^k) \geq 0$ ), то нам не потрібно перевіряти обмеження не перекривання, для відповідної пари еліпсів  $E_i$  і  $E_j$ .

*Крок 5.* Побудуйте набір показників, що включає такі пари  $(i, s)$  еліпса  $E_i(u_i)$  і напівплощини  $P_s^*$ , для яких  $\varepsilon$ -контейнер  $\Omega_i^k$  і  $P_s^*$  перекривають один одного, тобто

$$\Xi^{*k} = \{(i, s): \Phi^{\Omega_i^k P_s^*}(u_i^k) < 0, s \in I_m, i \in I_n\},$$

де  $\Phi^{\Omega_i^k P_s^*}(u_i^k)$  –  $\phi$ -функція для багатокутника  $\Omega_i^k(u_i^k)$  та напівплощини  $P_s^*$  [14].

Іншими словами, якщо  $\varepsilon$ -контейнер  $\Omega_i^k$  і  $P_s^*$  напівплощина мають спільні внутрішні точки (тобто  $\Phi^{\Omega_i^k P_s^*}(u_i^k) < 0$ ), тоді нам потрібно взяти до уваги обмеження утримання для відповідної пари об'єктів.

*Крок 6.* Будуємо вектор вихідних значень для допоміжних змінних  $\phi_{w_k}^k = (\phi_{ij}^k, (i, j) \in \Xi_k)$ .

Для кожної  $(i, j) \in (\Xi \setminus \Xi_k)$  пари шукаємо максимальне значення допоміжної змінної  $\phi_{ij}$ , використовуючи наступну не обмежену нелінійну задачу оптимізації:

$$\phi_{ij}^k = \arg \max_{\phi_{ij} \in [0, 2\pi] \subset R^1} \Phi'^{E_i E_j}(u_i^k, u_j^k, \phi_{ij}),$$

де,  $u_i^k, u_j^k$  – фіксовані параметри.

*Крок 7.* Вирішіть  $k$ -ту підзадачу, починаючи з точки  $(u^k, \phi_{w_k}^k) = (x^k, y^k, \theta^k, a^k, b^k, \phi_{w_k}^k)$ :

$$\max_{(u^k, \phi_{w_k}^k) \in W_k} F(u, \phi);$$

$$W_k = \{(u^k, \phi_{w_k}^k) \in R^{\sigma - \sigma_k}: \Phi'^{E_i E_j}(u_i, u_j, \phi_{ij}) \geq 0, (i, j) \in \Xi_k,$$

$$\Phi_{is}^*(u_i) \geq 0, (i, s) \in \Xi_k^*, \Phi^{E_i \Omega_i^{k*}}(u_i) \geq 0, a_i \geq b_i, b_i \geq b', a_i \leq a', i \in I_n\},$$

де  $F(u, \phi) = \pi \sum_{i=1}^n a_i b_i$  – квазі- $\phi$ -функція  $\Phi'^{E_i E_j}(u_i, u_j, \phi_{ij})$  визначена в (4),  $\phi$ -функція  $\Phi_{is}^*(u_i)$  визначена в (3),  $\Phi^{E_i \Omega_i^{k*}}$  визначена на кроці 3,  $E_k$  визначена на кроці 4,  $E_k^*$  визначена на кроці 5,  $\sigma_k = \text{card}(E \setminus E^k)$ .

*Крок 8.* Якщо  $F(u^{k*}, \phi_{w_k}^*) - F(u^{k-1*}, \phi_{w_{k-1}}^*) \leq 0.0001$  зупиняємо процедуру, інакше встановлюємо  $u^{k+1} = u^{k*}$ , приймаємо  $k = k + 1$  переходимо до кроку 2.

Алгоритм може в більшості випадків активно управляти лише  $O(n)$  парами еліпсів (це залежить від розмірів еліпсів та значення  $\varepsilon$ ), оскільки для кожного еліпса слід контролювати лише його “ $\varepsilon$ -сусідів”.

## 2.11 Висновки

В даному розділі розроблено алгоритм оптимального пакування еліпсів в полігональну область опуклої форми. В процесі роботи алгоритму перебираються варіанти розміщення еліпсів до моменту отримання максимального запакування досліджуваної області зі збереженням обмежень необхідних для адитивного виробництва. Алгоритм дозволить оптимізувати розміщення «нависаючих» елементів в виробі для зменшення кількості використання «підтримок».

Також алгоритм дозволить підвищити механічні властивості виробів, зокрема їх міцність та жорсткість, оскільки структура виробу має більше точок з'єднання, які немає потреби видаляти після завершення адитивного виробництва. Такий принцип дозволить використовувати менше матеріалу, оскільки необхідності в створенні підтримок немає. Відповідно це вплине на час виробництва, оскільки не витрачатиметься час на побудову додаткових елементів, і це дозволить зменшити витрати на виробництво в цілому.

Отже, науковою новизною одержаних в даному розділі результатів є:

1. Запропонований новий спосіб вирішення задачі упакування еліпсів в замкнену багатокутну область;

2. Введено нових обмежень обумовлених можливостями обладнання для адитивного виробництва (3D принтерів);
3. Розроблений алгоритм для вирішення задачі оптимізації деталей для «безсупортного» адитивного виробництва.

### 3 ПРАКТИЧНЕ ЗАСТОСУВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

#### *3.1 Застосування алгоритму для підготовки виробу до адитивного виробництва*

Представлений алгоритм був застосований для підготовки геометрії деталі до так званого «безсупортного» 3D-друку [6]. Ця геометрія є результатом рішення топологічної задачі оптимізації [6] для плоскої деталі 100 мм×40 мм×2 мм, яка жорстко закріплена на своєму лівому кінці і завантажена в нижній частині протилежної сторони вантажем (Рис. 3.1а). Одним із базових рішень проблеми є деталь досліджена в [6] з її фронтальною проекцією, показаною на Рис. 3.1б. Зауважте, що ця схема проектування є досить поширеною при тестуванні нових алгоритмів топологічної оптимізації (див., Наприклад, [17–18]).

Прямий 3D-друк даної деталі (Рис. 3.1б) із використанням, зокрема, технології DMLS [19], призводить до неочікуваних результатів друку [6]. Для виключення таких випадків (включаючи випадок, коли фрагменти деталей, що не прилягають до нижніх шарів робочої платформи, друкуються), спеціальні програми, що використовуються для підготовки моделей для 3D-друку, передбачають створення так званих «підтримок». Ці «підтримки», являють собою тонкостінні прямі, які використовуються в якості допоміжних елементів для з'єднання «нависаючих» елементів з робочою платформою чи нижніми шарами виробу. По завершенню процесу 3D друку «підтримки» слід видалити. Як приклад, на Рис. 3.1в показано топологію оптимізованої 3D деталі підготовленої до 3D друку за допомогою спеціального програмного забезпечення. Крім того, «підтримки», надруковані з використанням технології DMLS, часто дуже міцно зростаються із стінками деталей. Отже, ці «підтримки» можна буде повністю та якісно видалити лише за допомогою використання додаткової механічної обробки з використанням спеціального інструменту.

Вищевикладене визначає актуальність розробки методу проектування «безсупортних» моделей (ПБМП) для їх подальшого 3D друку. Потім допоміжні (опорні) елементи, створені цим методом, на відміну від «підтримок» у класичному розумінні, не видаляються після завершення друку деталей. Це зменшує виробничі витрати та час роботи. Для досліджуваної деталі при початковій  $\alpha = 45^\circ$  (кут нахилу опорних елементів) та  $d = 1$  мм (їх товщина) автори [6] отримали модель, топологія якої наведена на Рис. 3.1г.

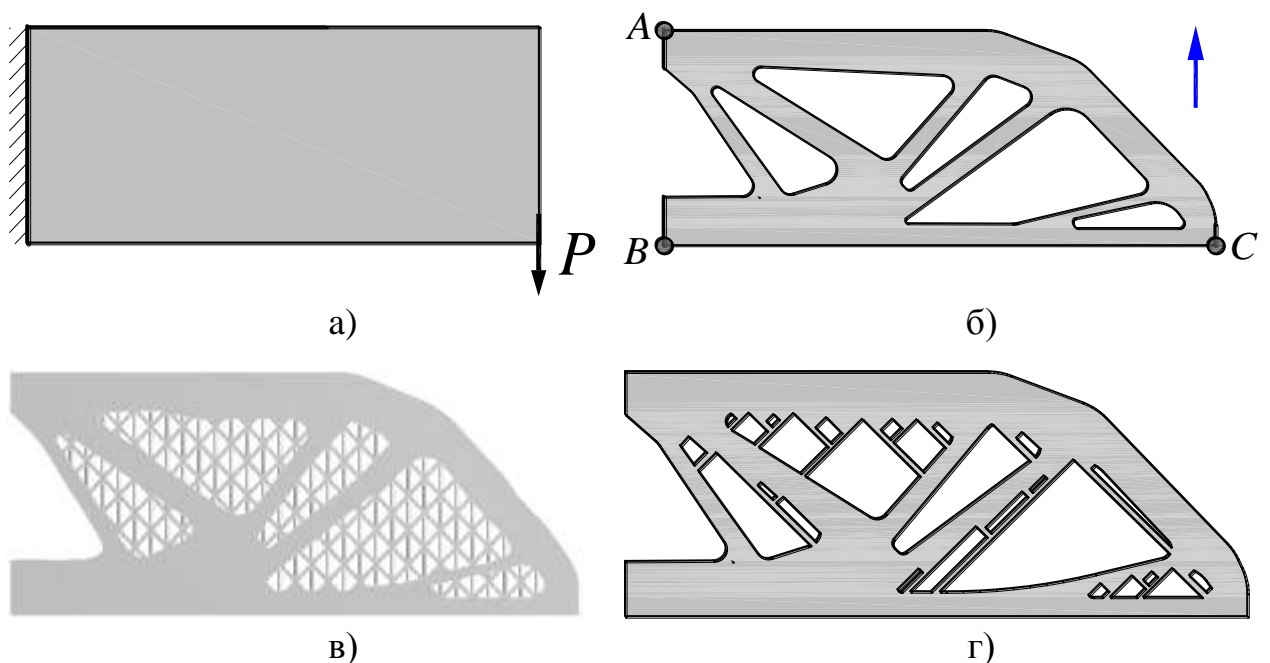


Рис. 3.1 – Досліджувана деталь

Більше того, деталь, створена з використання методу ПБМП (Рис. 3.1г), має різкі зміни форми зовнішньої поверхні у вигляді внутрішніх кутів. Вони являють собою так звані концентратори напруги, які спричиняють локальне збільшення механічних навантажень. Це демонструють результати обчислення напруженого стану під впливом статичного навантаження  $P = 100$  Н (Рис. 3.2). Схема навантаження відображена на рис. 3.1а. Якщо не враховувати характер напружено-деформованого стану в зонах кріплення деталі та точках прикладання навантаження (А, В та С, Рис. 3.1б), які вирівнюються внаслідок різних конструктивних рішень, максимальне

напруження в самій деталі становить 40 МПа (Рис. 3.2а). Приблизно таке ж значення напружень також було отримано для геометрії на Рис. 3.1в (29,8 МПа, Рис. 3.2б). Воно також виникає в одному з поверхневих гострих внутрішніх кутів. Для порівняння, максимальна розрахункова напруга в початковій геометрії (Рис. 3.1б) для однакової схеми обчислень практично вдвічі менше – 20,5 МПа (Рис. 3.2в). Зони виникнення максимального напруження в районах досліджуваних деталей позначені темними колами на Рис. 3.2.

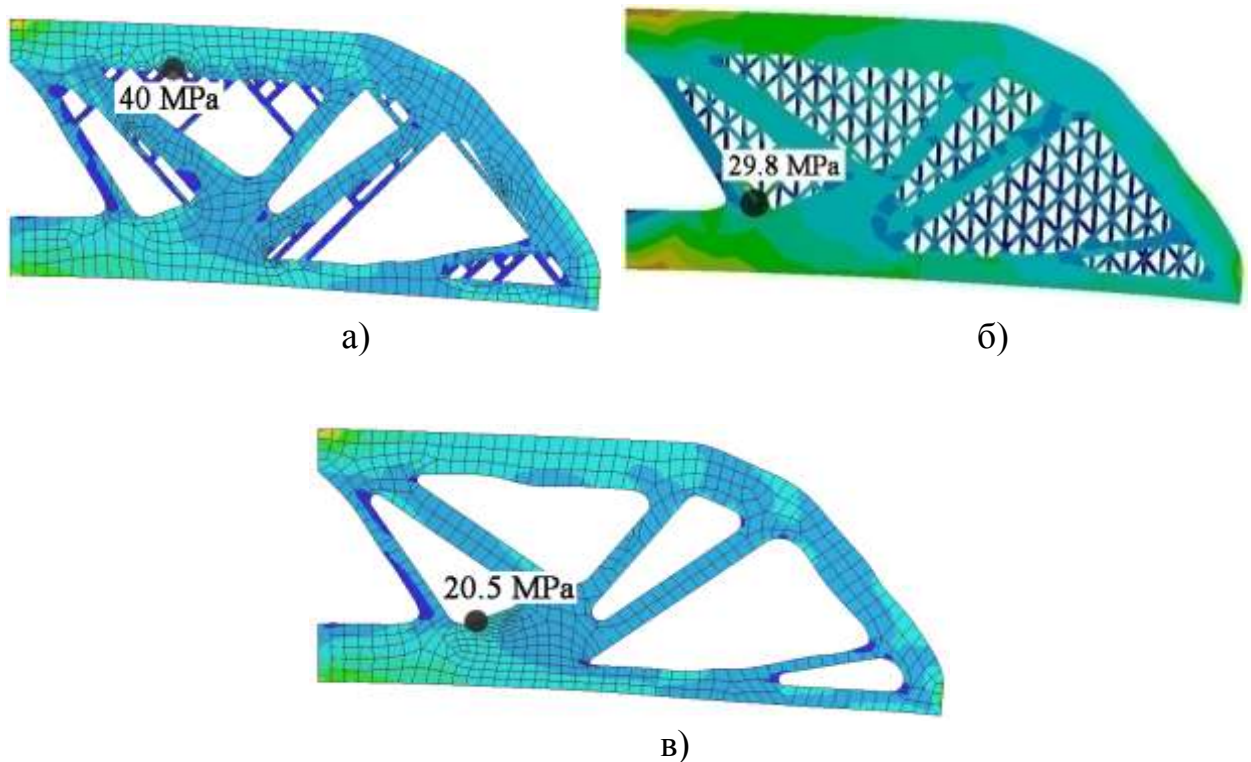


Рис. 3.2 – Напружений стан деталі

Слід зазначити, що обчислення проводились з використанням спеціального програмного комплексу. Точність рішення та збіжність контролювалися як за допомогою скінченних елементів другого порядку, так і зменшуючи розмір сітки біля концентраторів. Припустимо, що деталі виготовлені з порошкового матеріалу AlSi10Mg за технологією DMLS (напрямок 3D друку збігається зі стрілкою на Рис. 3б). На основі аналізу даних [19-21] щодо властивостей AlSi10Mg приймаються наступні значення: щільність  $\rho = 2670$  кг / м<sup>3</sup>; модуль пружності  $E_x = E_y = 70$  ГПа,  $E_z = 60$

ГПа; коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0.33$ ; пропорційна межа пружності  $\sigma_Y = 240$  МПа; величина виходу  $\sigma_U = 345$  МПа.

Альтернативну геометрію без концентраторів напружень у вигляді внутрішніх гострих кутів і пристосовану для 3D друку з використанням технології DMLS можна побудувати за допомогою алгоритму, описаного в Розділі 2. У цьому випадку ми маємо область, яка складається з п'яти непересічних опуклих багатокутників (див. Рис. 3.1б), тобто  $N = 5, \Omega = \cup_{q=1}^N P_q$ . Кожен багатокутник (позначений римськими цифрами I – V) задається координатами його вершин у фіксованій системі координат Оху (Рис. 3.3).

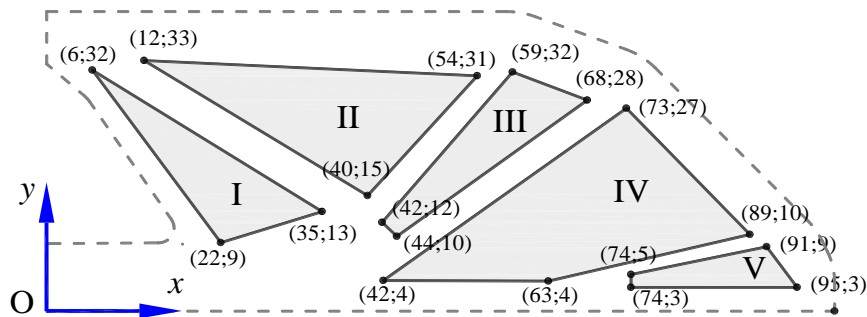


Рис. 3.3 - Полігональна відокремлена область  $\Omega$ , що включає п'ять опуклих компонентів

Рішення проблеми розміщення еліпсів показано на рис. 3.4а. Були взяті такі конструктивні параметри:  $a \leq a' = 7$ ,  $b \geq b' = 1$ ,  $1 \leq a/b \leq 3$ . Приймається мінімальна відстань між еліпсами (мінімальна товщина стінки) 0,4 мм. Рішенням є система з  $n^* = 18$  еліпсів, розміри та параметри розміщення яких наступні:

$\{(a_i^*, b_i^*), i = 1, 2, \dots, n^*\} = \{1.451003 \quad 1.056384 \quad 4.802429 \quad 1.610994$   
 $7.000000 \quad 4.287956 \quad 7.000000 \quad 7.000000 \quad 1.090857 \quad 1.000000 \quad 2.595877 \quad 2.155090$   
 $1.885885 \quad 1.000000 \quad 5.641415 \quad 3.205164 \quad 7.000000 \quad 3.617268 \quad 6.056729 \quad 1.976352$   
 $5.562663 \quad 2.428522 \quad 6.745289 \quad 5.740417 \quad 4.128611 \quad 2.363029 \quad 1.115792 \quad 1.097139$   
 $1.057427 \quad 1.000000 \quad 7.000000 \quad 6.673785 \quad 6.170471 \quad 2.357579 \quad 2.435725 \quad 1.244570\}$ ;

$\{(x_i^*, y_i^*, \theta_i^*), i = 1, 2, \dots, n^*\} = \{32.286981 \quad 13.513584 \quad -5.745522 \quad 12.901806$   
 $25.325731 \quad 51.024109 \quad 22.842710 \quad 15.805269 \quad -2.472655 \quad 38.707243 \quad 24.152712$



17.741416 31.416851 31.074263 -6.234513 49.217933 29.023256 -0.270066  
15.979933 31.698668 -12.211880 24.857973 28.557422 -2.627212 58.404311  
25.325248 -0.635181 47.424520 15.133046 -0.739892 70.325227 21.904571  
-0.520822 77.478412 13.586247 0.379686 49.841832 6.585715 2.826316  
86.879072 10.652407 0.913484 71.527138 6.994182 -0.195000 62.309043  
10.689779 -0.220688 86.942025 5.365597 3.107461 76.426350 4.262750  
3.039444}.

Очевидно, що описаний алгоритм також можна застосовувати для вирішення задачі розміщення кіл – достатньо встановити параметри  $a$  та  $a'$ ,  $b$  та  $b'$  рівними між собою. Результат реалізації розробленого алгоритму з  $a' = b' = r^* = 7$  представлений на рис. 3.4б (відстань між еліпсами, як і раніше, дорівнює 0,4 мм). Кількість кіл дорівнює  $n^* = 22$ , а їх радіуси та параметри розміщення такі:

$\{r_i^*, i = 1, 2, \dots, n^*\} = \{1.664237 \ 1.322005 \ 4.758209 \ 2.916789 \ 2.350569$   
1.905463 7.000000 3.935426 1.519199 4.017607 3.013604 2.210498 2.388148  
2.292906 1.520114 6.519394 6.534865 2.935743 1.055787 1.399771 2.813647  
2.025208};

$\{(x_i^*, y_i^*), i = 1, 2, \dots, n^*\} = \{12.268356 \ 25.903537 \ 31.922064 \ 13.436117$   
23.921757 14.569670 16.986074 21.315178 49.024862 28.883690 19.010394  
30.758557 38.707243 24.152712 26.478825 28.370655 44.064895 12.083559  
60.114721 27.108049 53.536939 20.919709 48.275344 15.969631 67.419941  
19.886294 72.728187 23.943264 86.078659 10.885955 76.471221 13.799521  
-61.775210 10.534865 50.883874 6.935743 45.194921 5.055787 77.560627  
4.399771 89.742686 5.813647 82.949432 5.025208}.

Слід зазначити, що загальна площа, зайнята еліптичними отворами в роз'єднаній зоні  $\Omega$  становить  $F^*(u^*) = \sum_{q=1}^N F_q^*(u^{q*}) = 882.1334$  ( $\{F_q^*, q = 1, 2, 3, 4, 5\} = \{123.4180, \ 237.6701, \ 117.1534, \ 348.6663, \ 55.2254\}$ ). Обчислювальний час – 811,798 с. Для вирішення задачі з колами ми

витратили більше часу розрахунку (1325,74 с), тоді як загальна площа  $F^*(u^*)$  трохи менше –  $\{F_q^*; q = 1, \dots, 5\} = 829,114486$  ( $\{F_q^*, q = 1, 2, 3, 4, 5\} = \{112,046755, 231,358008, 101,841761, 339,956928, 43,911408\}$ ), що визначає більшу його масу в порівнянні з представленим на Рис. 3.4а: 12,8 грам (для елісів) проти 19,7 грамів (для кіл).

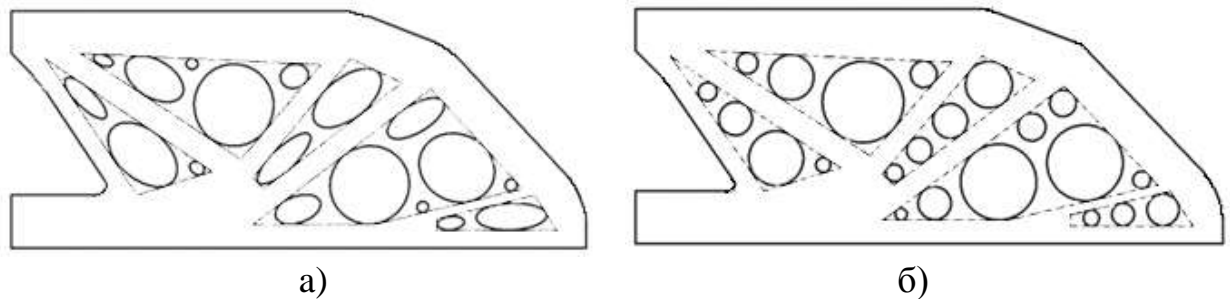


Рис. 3.4 – Фронтальна поверхня деталі з використанням результатів обчислень: а) з еліптичними отворами; б) з круглими отворами

Результат подальшого скінченно-елементного аналізу напруженого стану отриманих деталей представлений на Рис. 3.5 (обчислювальна схема подібна до описаної вище).

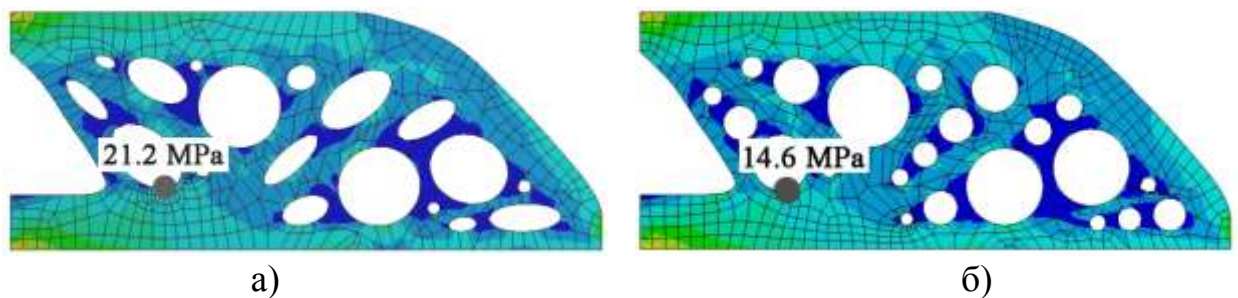


Рис. 3.5 – Механічне напруження деталей:  
а) з еліптичними отворами; б) з круглими отворами

У цих випадках середній рівень механічних навантажень набагато менший, ніж у попередніх моделях, а максимальні механічні напруження в досліджуваній зоні не перевищують 21,2 МПа для деталі з еліптичними отворами та 14,6 МПа при використанні круглих отворів. Це пояснюється як відсутністю геометричних концентраторів напружень, так і дещо більшою

масою деталі. Зокрема, маса деталі на Рис. 3.1б становить 10,7 грам; на Рис. 3.1в та 3.1г - 11,9 грам, тоді як маса початкової деталі (Рис. 3.2а) становить 21,2 грама. Очевидно, що збільшення часткової маси означає збільшення собівартості і є причиною зростання інерційних навантажень у випадку нестационарних вібрацій, тощо. Однак у той же час запропонований алгоритм підготовки геометрії деталей для прямого 3D-друку, на відміну від описаного в [6], не настільки чутливий до напрямку друку. На Рис. 3.6, зокрема, показані результати 3D друку деталі з еліптичними порожнинами (Рис. 3.4а) для двох різних орієнтацій на робочій платформі принтера.



а)

Рис. 3.6 – Результат 3D друку з різними орієнтаціями деталі



б)

Як видно з Рис. 3.6, готова деталь, отримана за допомогою 3D принтера EOS m270 [22], не має видимих дефектів в обох напрямках її виготовлення, а геометрія деталі практично не відрізняється від 3D моделі. Слід зазначити, що зміна напрямку друку може бути використана у разі підвищених вимог до міцності деталей, оскільки матеріал, отриманий за технологією DMLS, зокрема, AlSi10Mg, належить до класу поперечно ізотропних ( $E_x = E_y \neq E_z$ ,

тобто обираючи напрямок друку, модель напруженого стану може бути трохи "відрегульована" для даного статичного зовнішнього навантаження.

Таким чином, представлений алгоритм компоновання еліпсів дозволяє отримати альтернативну топологію деталей, яка підходить для 3D друку, не містить концентраторів напружень і не чутлива до напрямку друку. Наявність поверхонь найпростішої форми (зокрема, еліптичних отворів) дозволяє, якщо це необхідно, на завершальному етапі виготовлення застосовувати доступні технологічні операції для зменшення шорсткості поверхні, що, як відомо, суттєво впливає на втомну міцність деталі. Перераховане вище визначає переваги використання розробленого алгоритму для проектування деталей для їх адитивного виробництва.

### ***3.2 Алгоритм оптимальної упаковки в полігональну область***

Ми також перевірили представлений алгоритм для задачі (13) - (14), приймаючи  $q = 1$  – опуклий  $m$ -полігон ( $m = 9$ ), заданий його вершинами:

$$\{(x_s, y_s), s = 1, \dots, 9\} = \{(-14.532488, 3.186912), (-11.882672, -13.760668), (-6.583060, -17.467942), (4.621832, -21.326544), (13.404038, -21.326544), (32.104076, -8.161914), (41.340546, 4.775746), (14.236836, 19.831846), (-3.706132, 15.897590)\}.$$

Розглянемо колекцію еліпсів із змінними піввісями  $a \leq a', b \geq b', 1 \leq a/b \leq 3$ .

Мінімально допустима відстань між кожною парою еліпсів становить  $\rho = 0.4$  мм.

Якщо результат пошуку локального максимуму  $a' = 4$ , то кількість еліпсів  $n^* = 33$  та їх загальна площа становить  $F^*(u^*) = 1242,288916$ .

Обчислювальний час – 150 хвилин. Місцева оптимальна упаковка показана на Рис. 3.7а.

Для варіанту  $a' = 4$  – число еліпсів  $n^* = 17$  та їх загальна площа становить  $F^*(u^*) = 1278,927184$ . Обчислювальний час – 45 хвилин. Результат показаний на Рис. 3.7б.

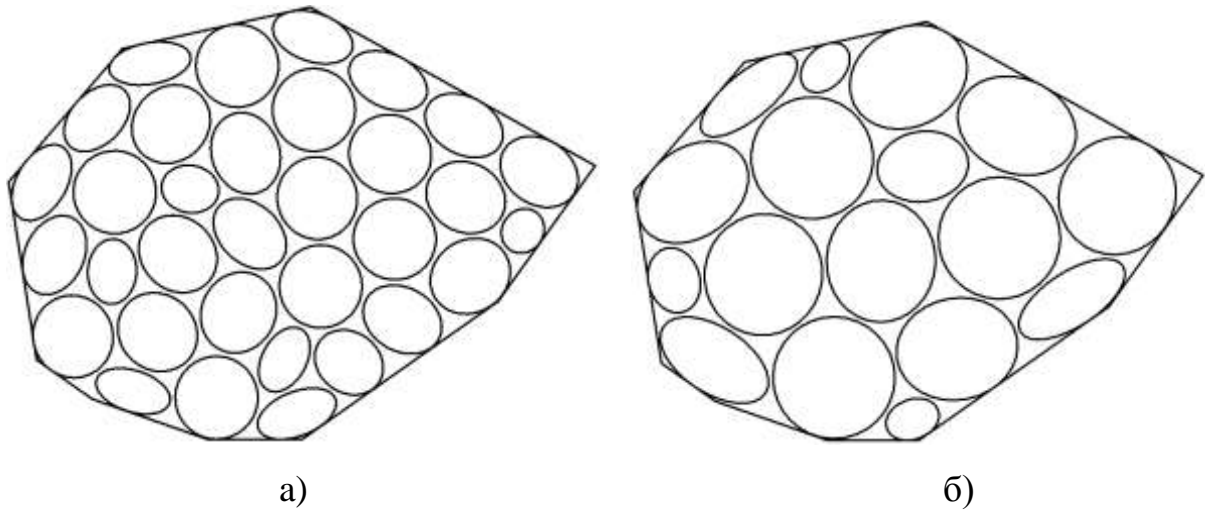


Рис. 3.7 – Локальна оптимальна упаковка:

а)  $a' = 4$ ; б)  $a' = 6$

### 3.3 Висновки

У дослідженні розглянута нова задача оптимізації компоновання еліпсів. Наш контейнер являє собою довільну відокремлену багатокутну область з опуклою складовою з'єднання. У задачі кількість еліпсів, їх розміри та параметри розміщення еліпсів є змінними.

Розроблений алгоритм дозволяє постійно перекладати та обертати еліпси для знаходження їх оптимального розташування, з точки зору запакування вибраної області. Враховуються повторні обмеження розмірів еліпсів. Мета алгоритму – максимізувати фактор упакування. Це твердження застосовується у адитивному виробництві для підготовки топології деталей для безпосереднього «безсупортного» виробництва.

Запропоновано нові інструменти для математичного моделювання обмежень відстані та стримування у вигляді регульованих  $\phi$ -функцій та квазі- $\phi$ -функцій. Наші інструменти дозволяють формулювати задачу розміщення у вигляді нелінійної задачі програмування.

Було розроблено новий алгоритм для побудови можливих вихідних точок та процедури оптимізації, щоб зменшити обчислювальні витрати на вирішення задачі упакування еліпсів.

Представлений у цій роботі приклад реалізації розробленого алгоритму для деталі з оптимізованою топологією вказує на те, що:

- отримана геометрія деталі не чутлива до напрямку адитивного виробництва;
- не вимагає так званих «підтримок», оскільки кількість «нависаючих» елементів мінімізовано;
- розраховані максимальні механічні напруження дещо нижчі, ніж для вихідної та альтернативної геометрії;

- система поверхні деталі проста з точки зору можливої подальшої механічної обробки, що особливо важливо для деталей, що піддаються динамічним навантаженням.

Практичне значення цінністю одержаних результатів при використанні розробленого алгоритму є можливість зменшення маси отримуваних виробів, підвищення їх міцності та довговічності, а також зменшення собівартість виробів, оскільки витрачається значно менше матеріалу (особливо для «підтримок») та виріб потребує лише мінімальної додаткової обробки. Також алгоритм включає в себе параметри, які необхідні для якісного виготовлення деталей за допомогою 3D принтерів, що виключає утворення дефектів на виробі.

## 4 СТАРТАП-ПРОЄКТ

Стартап – це процес виходу на ринок новоствореної компанії з інноваційним проектом за короткі терміни і, зазвичай, при мінімальних вкладеннях.

Стартап відрізняється від звичайної компанії тим, що він включає в себе:

- Інновацію, тобто або відкриття нового ринку в світі, або відкриття нового ринку в певному регіоні (але не завжди);
- Обмежені початкові інвестиції (у більшості випадків, початкові інвестиції – це кошти засновників проекту);
- Швидкий розвиток (стартапи, зазвичай, створюються в середньому за 3-4 місяці, винятком можуть стати високотехнологічні стартапи, на запуск яких може знадобитися до року);
- Низькі шанси на успіх (за статистикою 70% стартапів розвалюються ще в перший рік, а з решти 40% не доживає до дворіччя компанії).

В даний час стартапи є дуже популярним способом виходу на ринок. І якщо перші стартапи базувались на новітніх і інноваційних продуктах, то вже зараз це може бути конкурентоспроможний продукт, який необхідний ринку. Зараз на ринку існує велика кількість стартапів, одним з аспектів такої ситуації на ринку є краудфаундингові компанії. Краудфаундингова компанія дозволяє залучити кошти на створення та розвиток виробництва не залучаючи кошти банків, венчурних акціонерів чи бірж. Переваги такого способу в тому що такий спосіб можна використати, як фокус-групу для дослідження необхідності ринку, оскільки необхідно розробити лише бізнес модель проекту та представити її широкому загалу людей. І якщо ідея матиме попит, то буде отримано кошти на реалізацію проекту. А в разі, якщо ідея буде не зацікавить велику кількість людей, то і втрати учасників будуть не



великими, в порівнянні з створенням компанії, яка не дійде до запланованого результату, оскільки буде не цікава для споживача.

Власне ідея стартап проекту не коштує майже нічого. Головним завданням керівника проекту є створення робочої бізнес моделі. Для цього потрібно сформулювати концепцію послуги чи товару, визначитись з цільовою аудиторією та ринками збуту.

#### ***4.1 Опис ідеї проекту***

Популярність та застосування адитивних технологій в промисловості з початку нового століття значно зросла. Це пов'язано зі змінами на ринку виробництва продукції. З кожним роком складність геометричних форм, точність розмірів виробів, вимоги до міцності/зносостійкості/жорсткості виробів постійно зростають. Також ключовою ідеєю, яку переслідує ринок, є отримання якомога якіснішого виробу при меншій ціні виробництва. Всі ці вимоги часто несумісні з існуючим на ринку обладнанням. Оскільки у всього є межа, неможливо безкінечно підвищувати продуктивність верстатів при цьому зменшуючи енергоспоживання обладнання, 3D принтери часто замінюють існуюче обладнання. Так наприклад, 3D принтери популярні в медичній промисловості, оскільки необхідно швидко відтворювати індивідуальну для кожного пацієнта вироби. Оскільки технологія адитивного виробництва дозволяє одразу отримати необхідний виріб і не потребує значного часу в запуску виробництва, його корекції та т.і.

Можливості адитивних технологій дозволяють створювати вироби зі складнопрофільними поверхнями, внутрішніми порожнинами, внутрішні закриті поверхні з складною конфігурацією, криволінійні отвори або отвори з закритим доступом до них. Також різноманіття використовуваних матеріалів дозволяє створювати деталі з будь-якими фізично-механічними властивостями.

Ще однією сферою застосування адитивних технологій є прототипування. Технологія дозволяє швидко отримати виріб для тестування, змінити його конфігурацію і отримати новий прототип і так до моменту отримання фінального варіанту виробу. Це дозволяє значно скоротити витрати на створення нового виробу.

Враховуючи вище зазначене, метою даного стартап проекту є ПЗ, що дозволить оптимізувати час підготовки виробу до «безсупортного» адитивного виробництва, зменшити масу готового виробу, зменшити час на його постобробку та зменшити кількість використовуваного матеріалу.

## **4.2      *Аналіз актуальності запровадження ПЗ***

На ринку не існує аналогів ПЗ, яке б дозволяло підготувати виріб до «безсупортного» адитивного виробництва. Тобто дана ідея є інноваційною.

Тож треба визначитися з задачами, які вирішуватиме ПЗ в процесі підготовки виробу.

Основною задачею «безсупортного» виробництва є повна відмова від «підтримок» в процесі 3D друку, оскільки вони погіршують якість поверхні, потребують значно часу для побудови, а потім і для видалення. Але такий варіант можливий не завжди, тож першою задачею, яку вирішуватиме ПЗ буде це мінімізація використання «підтримок» шляхом оптимізації виробу.

Розглянемо другу задачу, яку вирішуватиме ПЗ. Отже, якщо після вирішення першої задачі, «підтримки» все ще використовуються для повноцінного виробництва деталі, то переходимо до оптимізації побудови «підтримок».

Також ПЗ дозволить пропустити вирішення першої задачі, оскільки зміна конфігурації виробу не завжди є актуальним рішенням.

В таблиці 4.1 подана інформація стосовно загального уявлення про склад ідеї, цільові ринки використання ПЗ, на яких потрібно шукати вигоду та потенційних клієнтів.

Таблиця 4.1 – Склад стартапу

<i><b>Склад ідеї</b></i>	<i><b>Напрямки застосування</b></i>	<i><b>Вигоди для клієнтів</b></i>
Створення ПЗ для вирішення описаних задач	Виготовлення функціональних деталей та прототипів	Зменшення часу на виготовлення
		Зменшення часу на постобробку
		Зменшення собівартості виготовлення

### ***4.3 Аналіз сфер застосування стартап-проекту***

Визначимось з сферами застосування розробленого ПЗ.

Оскільки адитивне виробництво є найбільш актуальним та вигідним для індивідуального, дрібно- та середньосерійного виробництв, можна відокремити сфери найбільш вигідного запровадження стартапу. Для таких типів виробництв зменшення кількості використовуваного матеріалу, зменшення часу на підготовку до виробництва та зменшення часу на виробництво є дуже актуальним. Відокремимо сфери, які будуть ключовими ринками для реалізації нашого продукту:

- Аерокосмічна;
- Медична;
- Прототипування;
- Ремонт та покращення спортивних авто.

Розглянемо ці сфери більш конкретно, для визначення задач, які допоможе вирішити наш стартап-проект.

### ***Аерокосмічна сфера.***

Для цієї сфери виробництва актуальним є можливість отримання складнопрофільних виробів з мінімальними витратами на їх виробництво та зменшення часу на їх отримання. Оскільки існуючі виробництва з металоріжучим обладнанням не завжди можуть отримати вироби необхідної конфігурації, їх необхідно оптимізувати для отримання за допомогою існуючого обладнання. Оптимізація таких виробів може призводити до збільшення маси або погіршення механічних характеристик, що є неприпустимим. Тож в цю галузі активно запроваджуються адитивні технології, адже це дозволяє отримувати необхідні вироби без додаткової оптимізації чи спрощення форми виробу. Також 3D принтери використовуються в космосі (наприклад, для ремонту на МКС).

Отже, ця галузь є відкритою до запровадження нашої технології, оскільки це дозволить отримувати вироби без використання додаткового матеріалу, зменшить час на його виготовлення, а також дозволить зменшити вагу отримуваних виробів.

### ***Медицина***

Адитивне виробництво запроваджується в медичну галузь для виготовлення імплантів та протезів чи отримання виробів для подальших досліджень (наприклад, тестування медичних препаратів на виготовлених органах). 3D друк є актуальним в даній галузі, оскільки створення індивідуальних протезів для кожної конкретної людини підвищує шанси на одужання пацієнта. Оскільки звичайні виробництва не дозволяють швидко і якісно отримувати необхідні вироби, цю сферу захоплюють адитивні технології. Наприклад, Компанія Oxford Performance Materials в США успішно провела операцію з відновлення шматка черепа пацієнта, роздрукувавши точну модель відсутнього фрагмента на 3D-принтері. І таких прикладів дуже багато.

3D друк дозволяє швидко отримувати необхідні вироби і не потребує їх уніфікації для налагодження виробництва. Впровадження розробленої технології дозволить швидше отримувати необхідні вироби, а також зменшити їх масу.

### ***Прототипування***

Прототипування за допомогою 3D друку використовується в багатьох сферах, оскільки це дає можливість швидко отримати необхідні вироби для їх тестування. Прототипування дозволяє зменшити час на запуск виробництва, оскільки не потребує багато часу для виготовлення тестового виробу, дає можливість доопрацювати виріб для зручності його збирання чи експлуатації. Також дозволяю внести зміни до конструкції виробу, завдяки швидкому отриманню якісних тестових моделей. Застосування дозволяє суттєво підвищити швидкість та якість виробництва, оскільки проблеми конструкції можна вирішити, навіть до першого запуску виробництва.

Отже, адитивні технології дозволяють швидко отримувати функціональні і тестові моделі, для перевірки їх працездатності та внесення змін в конструкцію. А впровадження нашого стартап-проекту дозволить зменшити витрати на матеріал і ще підвищить швидкість виробництва.

### ***Ремонт та покращення спортивних авто***

Ця сфера займається індивідуальним виробництвом, оскільки ця діяльність не є масовою, і кожне авто має індивідуальні проблеми та конструкцію. Адитивне виробництво не здатне в значній мірі конкурувати з масовим виробництвом, оскільки ціна на виріб не буде зменшуватися в залежності від кількості виробів. Відповідно 3D друк є актуальним у цій сфері, оскільки дозволяє переглянути на результат до запуску виробництва, отримати готовий виріб, швидко змінити пошкоджені елементи, підвищити механічні властивості окремих виробів. Наприклад, використання адитивних технологій є актуальним для команди з раллі, оскільки є обмежені строки по ремонту авто, і обладнання має бути мобільним.

Отже, впровадження нашого алгоритму в цю галузь дозволить ефективніше ремонтувати, покращувати та підтримувати працездатність авто. Також це дозволить зменшити витрати на виробництво чи ремонт.

#### ***4.4 Аудит проекту***

Визначимо можливості реалізації проекту. Використаємо розроблений в процесі дослідження алгоритм заповнення еліпсами в якості основного методу вирішення задач поставлених перед ПЗ. Цей алгоритм безперешкодно впорається з поставленими задачами, до того ж він враховує обмеження необхідні для адитивного виробництва. Також цей метод має достатньо параметрів для управління в процесі створення, щоб бути досить універсальним для будь-якої з технологій адитивного виробництва.

Отже, цей алгоритм ідеально підходить для вирішення поставлених перед стартап-проектом задач.

#### ***4.5 Маркетингове дослідження***

Розглянемо можливості нашого проекту на ринку виробництва продукції.

Перелічимо перспективи нашого продукту:

- Оскільки продукт є інноваційним, то він немає прямої конкуренції, єдиними конкурентами є заводи, що займаються дрібносерійним виробництвом на замовлення;
- Основними споживачами нашого ПЗ будуть дрібносерійні та середньосерійні виробництва;
- Можливість створення власного виробництва, яке дозволить виготовляти продукцію і конкурувати з існуючими на ринку виробництвами.

Для початку роботи над проектом, нам необхідно презентувати продукт для інвесторів, розповісти про його перспективи та прибутковість, оцінити ризики, що можуть виникнути в процесі розробки чи виходу на ринок.

Після залучення необхідних інвестицій слідуємо такому плану:

- Створюємо команду (2 програмісти, системний адміністратор та тестувальник);
- Винаймаємо приміщення для роботи команди;
- Робимо ремонт в приміщенні та закуповуємо необхідне обладнання (столи, стільці, ПК);
- Далі по готовності ПЗ проводимо презентацію готового продукту для інвесторів;
- Проводимо презентацію для виробництв чи компаній, які зацікавлені в отриманні наших послуг;
- Розпочинаємо розповсюдження нашого ПЗ, допомагаємо підготувати кадри для роботи з нашим ПЗ та налагодити виробництво;
- Надаємо експертну підтримку, продовжуємо покращувати наше ПЗ.

Кошти необхідні для початку роботи над проектом:

- Оренда приміщення – 10000 грн/міс;
- Заробітна плата – програмісти по 25000 грн/міс, системний адміністратор – 20000 грн/міс та тестувальник – 15000 грн/міс;
- Ремонт в приміщенні – 150000 грн;
- Придбання офісних меблів та обладнання – 200000 грн;
- Маркетингові витрати – 5000 грн/міс.

Отже проводимо підрахунки з урахуванням зарплатного фонду на найближчі півроку та 30% на непередбачувані витрати отримуємо, що для початку роботи над проектом нам необхідно близько 1,3 млн. грн.

Після завершення роботи над продуктом на що знадобиться близько 2-3 місяців, розпочинаємо його розповсюдження.

Базуючись на інноваційності нашого продукту, його можливості та вигоду яку це принесе для виробництва встановлюємо ціну на ПЗ на рівні 5000\$. Розповсюдивши достатню кількість продукції залучаємо нові інвестиції для створення власного адитивного виробництва.

На яке нам знадобиться суттєво більше коштів, оскільки необхідна більша площа, більше кадрів, дорого вартісне обладнання. Розглянемо план впровадження технології у виробництво у наступному розділі, на прикладі.

#### ***4.6 Створення адитивного виробництва з використанням нашого стартап-проекту***

Розглянемо впровадження на декількох прикладах:

- Виробництва, яке вже використовує адитивні технології;
- Виробництва, яке лише збирається придбати обладнання для адитивного виробництва.

Почнемо з виробництва, яке використовує в своїй роботі лише металоріжучі верстати. Для отримання більшого прибутку вирішується залучити до виробництва адитивні технології. Для цього необхідно:

- Придбати 3D принтер;
- Найняти співробітників для роботи з цим обладнанням;
- Винайняти/виділити окреме приміщення для нового обладнання.

Після виконання цих пунктів виробництво вже починає використовувати нове обладнання та обкатувати цю технологію. Через деякий час побачивши рекламне оголошення нашої продукції вирішує скористатися нашими послугами, для швидшого відбивання коштів витрачених на оновлення обладнання. Наше ПЗ дозволяє підняти швидкість виробництва та якість отримуваних виробів, що впливає на зменшення



витрат на виготовлення, відповідно і на собівартість отримуваної продукції. Використання нашого ПЗ дозволить швидше «відбити» вкладення у придбання нового обладнання та розширити лінійку послуг виробництва.

Стосовно впровадження у виробництво, яке вже використовує адитивні технології, то це дозволить набагато ефективніше використовувати матеріал для 3D друку, а також збільшувати об'єми виробництва, оскільки 3D принтери також дозволяють друкувати без зупинок, необхідно лише слідкувати за наявністю необхідної кількості матеріалу для друку та періодичною перевіркою працездатності всіх систем принтера, оскільки це впливає на якість отримуваної продукції.

Для виробництва, яке вже використовує адитивні технології, впровадження буде швидшим і вигіднішим, оскільки це не потребує додаткових суттєвих витрат. А повне «відбивання» вкладених коштів в використання нашої технології залежить лише від кількості замовлень. Оскільки 3D друк не є доступною технологією, але його використання суттєво спрощує виготовлення складнопрофільних виробів і пришвидшує процес отримання готових виробів. Отже використання адитивних технологій в сферах, які займаються виготовленням унікальних виробів, які не розраховані на масове виробництво є досить вигідним, оскільки дозволяє виготовляти абсолютно будь-які конфігурації.

#### **4.7 Висновки**

Під час створення стартап-проекту був проведений аналіз ринку, аналіз його потреб та способи розповсюдження ПЗ. Під час створення стартап-проекту було визначено, що дана технологія є актуальною для ринку і дозволить отримувати вироби, які до цього неможливо було б отримати.

Машинобудівний ринок є привабливим для впровадження даного стартап-проекту через його актуальність. Слід зазначити що сфери

використання адитивних технологій постійно розширюються. З огляду потенційних груп покупців суттєвих проблем для виходу на ринок не виявлено, оскільки аналогів ПЗ на ринку немає.

Відповідно впровадження даної технології в ринок є перспективним і прибутковим рішенням, оскільки через відсутність конкурентів в даній частині ринку, можна отримати достатньо прибутків, для удосконалення та розширення сфер впливу та використання даного ПЗ.

## 5 ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

В роботі були проаналізовані проведені раніше дослідження та експерименти. Ґрунтуючись на даних обраних для дослідження та об'єкти досліджень було прийнято рішення про розгляд та пошук методів рішення задачі оптимізації розташування еліпсів в багатокутній області. Це дозволить підготовляти деталі для «безсупортного» виробництва.

В дослідженні було отримано алгоритм, що вирішує задачу максимальної упаковки еліпсів у відокремлену багатокутну опуклу область. Також алгоритм має параметри, які визначаються параметрами обладнання для адитивного виробництва (мінімальна товщина стінки, максимальний/мінімальний радіус кривизни утворений перетином внутрішніх поверхонь, максимальний кут нахилу «нависаючих» елементів). Отже, розроблений алгоритм використовує максимальну кількість факторів, необхідних для підготовки виробу до «безсупортного» адитивного виробництва. Це дозволяє використовувати цей алгоритм для правильного розміщення еліпсів в замкненій багатокутній області, яка задається вершинами її кутів, з урахуванням параметрів необхідних для 3D друку виробу.

Також в роботі представлено приклад оптимізації деталі, що була отримана методом топологічної оптимізації. Було порівняно напружені стани деталі після топологічної оптимізації, з пустотами заповненими прямолінійними «підтримками», еліпсами та колами. Порівняння підтвердило, що використання прямолінійних «підтримок» викликає великі напруження в місцях з'єднання з тілом виробу, а використання еліптичних структур для заповнення пустот в тілі деталі призводить до значного зменшення напружень у виробі. Також плавні переходи поверхонь сприяють нормальному розподілу навантаження на поверхні та більшому розповсюдженню діючої сили. Відповідно заповнення еліпсами зменшує масу виробу, підвищуючи його міцність та довговічність.

Було запропоновано стартап-проект створення програмного забезпечення, яке дозволить оптимізувати деталі для «безсупортного» адитивного виробництва. Даний стартап-проект дозволяє зменшити собівартість виробництва деталей зберігаючи при цьому їх конструктивні особливості, механічні та фізичні властивості. Використання 3D друку з кожним роком зростає, що свідчить про актуальність ідеї проекту.

Отже, в роботі розроблено алгоритм вирішення задачі максимального упакування еліпсами багатокутної області з опуклими компонентами зв'язності. Та розглянуто варіанти його впровадження в існуюче виробництво.

## Список літератури

1. Марка Porsche представила напечатанные в 3D поршни [Электронный ресурс]. – 2020. – Режим доступа до ресурсу: <https://www.drive2.ru/e/B9ZQgEAAAIE>.
2. Материалы поддержки в 3D-печати [Электронный ресурс] – Режим доступа до ресурсу: <https://daloto.ru/obzory/materialy-podderzhki-v-3d-pechati>.
3. Как оптимизировать настройки поддержек (суппортов) в Cura [Электронный ресурс] – Режим доступа до ресурсу: <https://3dprintstory.org/kak-optimizirovat-nastroiki-podderzhek-supportov-v-cura>.
4. Аддитивные технологии в машиностроении / Зленко М.А., Попович А.А., Мутылина И.Н. – Москва – 2015.
5. Как работают 3D принтеры по металлу. Обзор SLM и DMLS технологий. Аддитивное производство. 3D печать металлом. [Электронный ресурс] – Режим доступа до ресурсу: <https://3dtool.ru/stati/kak-rabotayut-3d-printery-po-metallu-obzor-slm-i-dmls-tekhnologiy-additivnoe-proizvodstvo-3d-pechat/>.
6. Optimal topology for additive manufacture: A method for enabling additive manufacture of support-free optimal structures / [M. Leary, L. Merli, F. Torti та ін.]. // Materials and Design. – 2014. – №63. – С. 678–690.
7. Liu K. An efficient 3D topology optimization code written in MatLab / K. Liu, A. Tovar. // Struct. Multidisc. Optim. – 2014. – №50. – С. 1175–1196.
8. Selective laser melting (SLM) of AlSi12Mg lattice structures / [M. Leary, M. Mazur, J. Elambasseril та ін.]. // Materials and Design. – 2016. – №98. – С. 344–357.
9. Huang X. Evolutionary topology optimization of continuum structures: methods and applications / X. Huang, Y. Xie., 2010. – 228 с. – (UK: A John Wiley & Sons Ltd).

10. Kallrath J. Packing ellipsoids into volume-minimizing rectangular boxes // J. of Global Optimization. – 2017. – №67. – C. 151-185.
11. Kampas F. General Ellipse Packings in Optimized Regular Polygons / F. Kampas, I. Castillo, Pintér J.D.. // Ibid. – 2016.
12. Delgado J. Influence of process parameters on part quality and mechanical properties for DMLS and SLM with iron-based materials / J. Delgado, J. Ciurana, C. Rodríguez. // The International Journal of Advanced Manufacturing Technology. – 2012. – №60. – C. 601–610.
13. Optimized object packings using quasi-phi-functions / Y. Stoyan, A. Pankratov, T. Romanova, A. Chugay. // Springer Optimization and its Applications.. – 2015. – №105. – C. 265–291.
14. Stoyan Y. Mathematical models of placement optimisation: two- and three-dimensional problems and applications / Y. Stoyan, T. Romanova. // Modeling and Optimization in Space Engineering. – 2012. – №73. – C. 363–388.
15. Stoyan Y. Cutting and Packing problems for irregular objects with continuous rotations: mathematical modeling and nonlinear optimization / Y. Stoyan, A. Pankratov, T. Romanova. // J. of the Operational Research Society. – 2015. – №67. – C. 786–800.
16. Chernov N. Mathematical model and efficient algorithms for object packing problem / N. Chernov, Y. Stoyan, T. Romanova. // Comput. Geom. Theory Appl.. – 2010. – №43. – C. 535–553.
17. Jain C. An improved material-mask overlay strategy for topology optimization of structures and compliant mechanisms / C. Jain, A. Saxena. // J. of Mechanical Design. – 2010. – №132. – C. 1–10.
18. Cardoso E. Complexity control in the topology optimization of continuum structures / E. Cardoso, J. Fonseca. // J. of the Braz. Soc. of Mech. Sci. & Eng. – 2003. – №15. – C. 293–301.
19. Atzeni E. Study on unsupported overhangs of AlSi10Mg parts processed by Direct Metal Laser Sintering (DMLS) / E. Atzeni, A. Salmi. // Journal of Manufacturing Processes. – 2015. – №20. – C. 500–506.

20. Tribological Behavior of Aluminum Alloy AlSi10Mg-TiB<sub>2</sub> Composites Produced by Direct Metal Laser Sintering (DMLS) / [M. Lorusso, A. Aversa, D. Manfredi та ін.]. // Journal of Materials Engineering and Performance. – 2016. – №25. – С. 3152–3160.
21. Evaluation of light-weight AlSi10Mg periodic cellular lattice structures fabricated via direct metal laser sintering / [C. Yanab, L. Haoa, A. Hussein та ін.]. // Journal of Materials Processing Technology. – 2014. – №214. – С. 856–864.
22. <https://www.eos.info/en>